ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101658324037

# Титульный лист

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Фамилия** МАТВЕЕВ

**Имя** ИВАН

**Отчество** РОМАНОВИЧ

**Дата рождения** 12 03 2008

**Город участия** УФА

**Аудитория** 8АКТ

**Дата** 02 02 2026 **Подпись**

**Пример заполнения** АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ
ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101658324037

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс**

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

**Город участия** УФА

## Заполняется организаторами

Количество доп листов 1

Количество черновиков к проверке 3

Время выхода с __ __ до __ __

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 0 | 5 | – | 20 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 0 | 5 | – | 20 | | | | | |

**Итоговый балл** 45

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№ 1

$f(\overline{ab}) = \underline{a \text{ или } b}$

$f(\overline{ab})\, f(\overline{bc})\, f(\overline{ca}) = abc$

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

? $f(11) + \dots + f(19) + f(21) + \dots + f(29) + \dots$
$\dots + f(91) + \dots + f(99)$

$\exists\, a = b$

$\Rightarrow f(\overline{aa})\, f(\overline{ac})\, f(\overline{ca}) = a^2 c$

$f(\overline{aa}) = a$

$\Rightarrow f(\overline{ac})\, f(\overline{ca}) = ac$ для $\forall a, c \neq 0$

это возможно, если одна из $f \to a$, а другая $f \to b$

т.е $f(\overline{ac}) \neq f(\overline{ca})$ $\forall a, c \neq 0$

Разложим искомую сумму

$\left(f(11) + f(22) + \dots + f(99)\right) + \left(f(12) + \cancel{f(21)}\, f(13) + f(14) \dots + f(98)\right)$

$f(\overline{aa}) = a$ однозначно задается

Каждая пара вида
$f(\overline{ac}) + f(\overline{ca}) = a + c$ ✓

$(1+2) + (1+3) + \quad + (1+9) +$
$+ (2+3) + (2+4) + \dots + (2+9) +$
$+ (3+4) + (3+5) + \dots + (3+9) +$
$+ \dots + (8+9)$

СМ стр 2 на обороте

№1 продолжение

Итог искомая сумма:

$$\left(1+\ldots+9\right)+\left(\left|(1+2)+(1+3)+\ldots+(1+9)\right|+\left|(2+3)+\ldots+(2+9)\right|+\ldots+(8+9)\right)$$

$\frac{10\cdot 9}{2}=45$

тут ~~[redacted]~~ 8 единиц и по одной ②, 3, 4, , 9

↑ тут тоже двойка

~~[redacted]~~ 7 двоек и по одной 3, 4, 5, ..., 9

аналогично со всеми числами мы получим, что у нас по ~~[redacted]~~ 8 каждой цифры

т.е. $(1+2+\ldots+9)\cdot 8=45\cdot 8$

Прибавим первые 9 цифр и итоговый

Ответ. ~~45·8 = 360~~

$45\cdot 9=405$

$45\cdot 8 = 360$

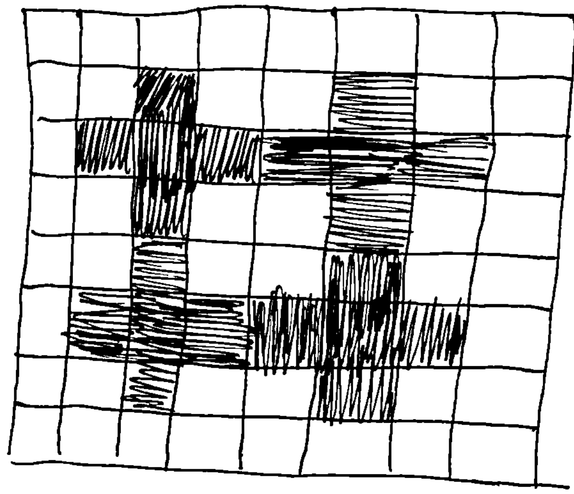
Ответ ~~360~~ 405

+

Линия отреза

Бланк ответов

№3



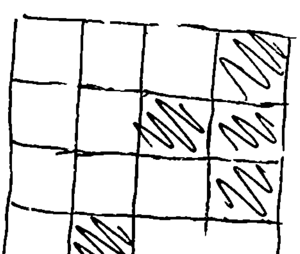
Пример: на 4 креста.

✓ пример

Ответ 4

Оценка Почему 3 креста мало?

Разобьем поле на 4 квадрата 4×4



Заметим, что если расположить в нем крест полностью (все клетки внутри) то другой поставить неудасться

НО а если так?

если мы "выдвинем" (уберем за границу) хотябы одну из клеток креста, то в нем можно будет нарисовать второй => в одном квадрате 4×4 хотябы по одному кресту. А квадратов 4 => ≥4!

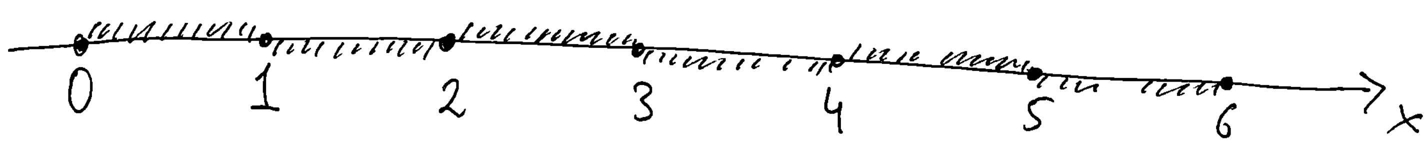
№5

$A = (0,1) \cup (2,3) \cup (4,5)$

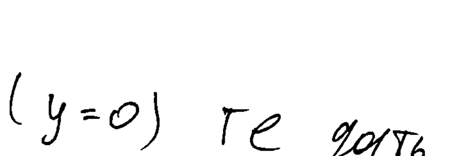
$B = (1,2) \cup (3;4) \cup (5,6)$

$k - ?$ $\quad (k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k = 0$

2 корня $\quad x_1 \in A,\ x_2 \in B$




Это иллюстрация условия
наше ур-ие парабола
Она должна пересеч OX ($y=0$) те дать корни
на промежутках с разной штриховкой
т.е условно «войти» и «выйти» на промежут
с разной штриховкой.
Заметим, что при правильном положении
как
корней (рассмотрим параболу ветвями вверх)
$x_1 \in A,\ x_2 \in B$ над параболой (значения параболы $<0$) будет
нечетное количество, а
под параболой четное




Тогда для $k > 2$

$f(0)\ f(1)\ f(2)\ f(3)\ f(4)\ f(5)\ f(6) < 0$ ← строгий знак, тк $\{1,2 \ldots, 6\}$ - не корни $\notin A$ и $B$ корни

Заметим, что $f(0)$ и $f(6)$ обяз быть $\geq 0$, иначе

Линия отреза

Бланк ответов

№5 продолжение

для $k>2$ — парабола вверх

$$\begin{cases} f(1)\,f(2)\,f(3)\,f(4)\,f(5)<0 \\ f(0)>0 \\ f(6)>0 \end{cases}$$

в случае $k<2$ — парабола вниз

в подх случае знач параболы $<0$ должны быть в четном кол-ве точек

а в 0 и 6 обяз $<0$ аналог

$k<2$

$$\begin{cases} f(1)\,f(2)\,f(3)\,f(4)\cdot f(5)>0 \\ f(0)<0 \\ f(6)<0 \end{cases}$$

Можем объединить разные случаи в одну систему

$$\vee \begin{cases} (k-2)\,f(1)\,f(2)\,f(3)\,f(4)\,f(5)<0 \\ (k-2)\,f(0)>0 \\ (k-2)\,f(6)>0 \end{cases}$$

Нер-ва все еще строгие т.к. при $k=2$ будет не квадратич, а линейная функция $\Rightarrow$ 1 корень, нам не подх

№5 продолжение

$(k-2)x^2+(k-1)^2x+k=0$

$x=-k$

$k^3-2k^2-k^3+2k^2-k+k=0 \Rightarrow x_1=-k$ – корень

Th Виета

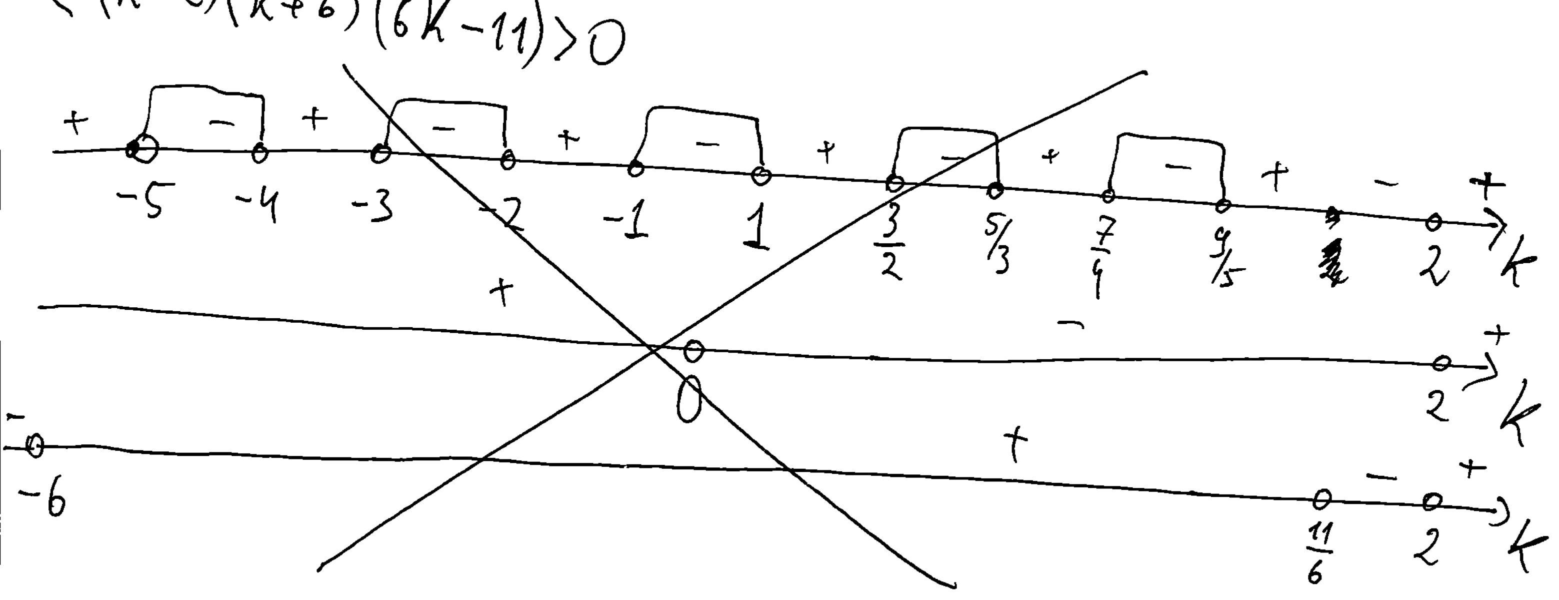
$x_1 x_2=\frac{k}{k-2} \Rightarrow -k\,x_2=\frac{k}{k-2} \Rightarrow x_2=\frac{1}{2-k}$

$\Rightarrow (k-2)x^2+(k-1)^2x+k=(x+k)\left(x+\frac{1}{k-2}\right)\cdot(k-2)=$

$=(x+k)((k-2)x+1)$

Подставляем в систему:

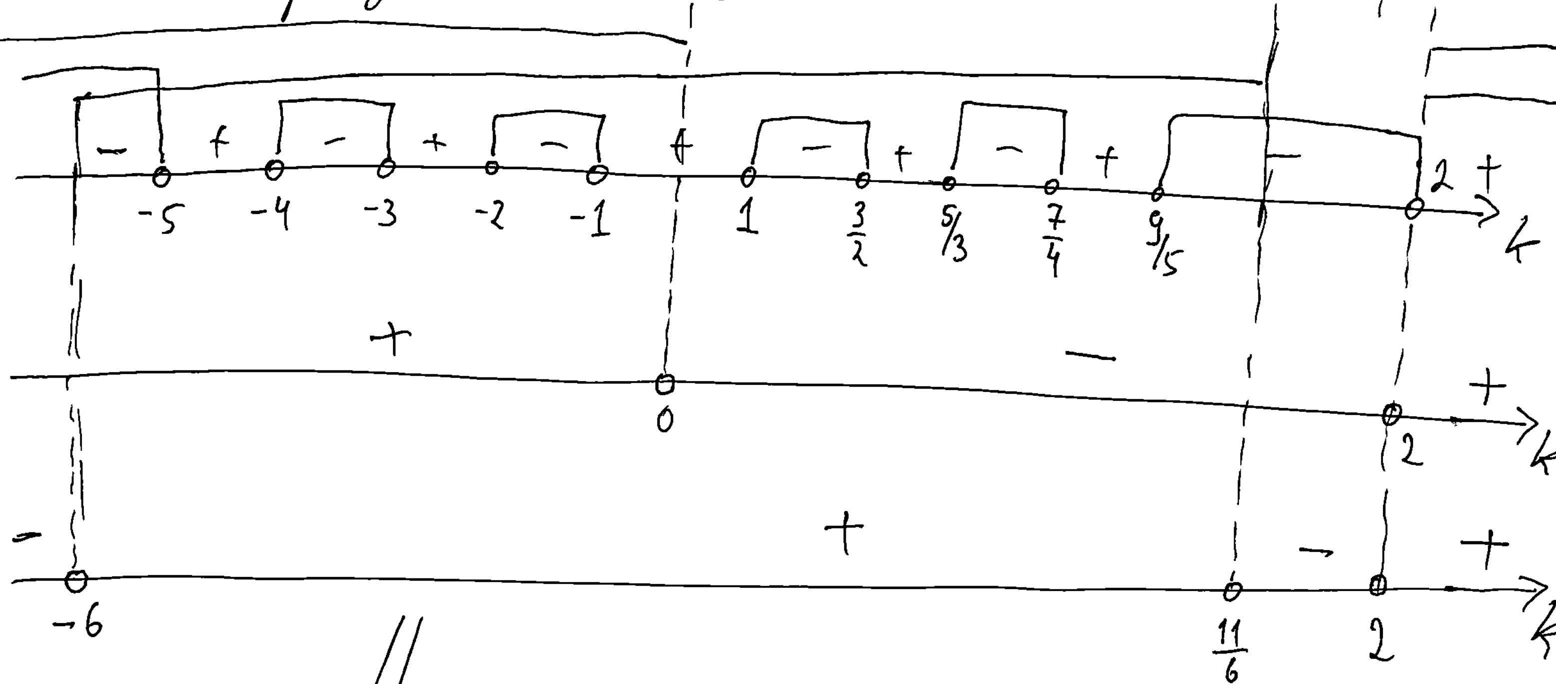
$$\begin{cases} (k-2)\underbrace{(k+1)(k-1)}_{f(1)}\underbrace{(k+2)(2k-3)}_{f(2)}\underbrace{(k+3)(3k-5)}_{f(3)}\underbrace{(k+4)(4k-7)}_{f(4)}\underbrace{(k+5)(5k-9)}_{f(5)}<0 \\ (k-2)\underbrace{k}_{f(0)}>0 \\ (k-2)(k+6)(6k-11)>0 \end{cases}$$



~~Продолжение~~

Дополнительный лист № 1

№ 5 Продолжение



$\Downarrow$

$k \in (-6;-5) \cup (-4,-3) \cup (-2;-1)$

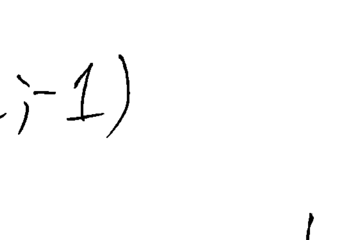
Ответ: $k \in (-6,-5) \cup (-4,-3) \cup (-2;-1)$ +

№ 2

$$\begin{array}{r|l} 2025 & 8 \\ \hline -16 & 253 \\ 42 & \\ -40 & \\ 25 & \\ -24 & \\ 1 & \end{array}$$

(ост 1) => в один ряд можно поставить 253 змейки и ост 1 клетка

=> 2025 253 −



2025 253 + 253 =

= 2026 ~~24~~ 253

Максимум поставленных змеек => max ходов = 2026 · 253

№2 Продолжение

2026·253·2 => при игре все змейки в ряд
и так до конца (как прошлое заполнение)

А если игра другая? То есть на поле поставят не так кол-во змеек?

При такой игре победит тот, кто ~~не~~ ставит „чётных" змеек, тк послед змейка чётная

=> послед ходит вторым.

=> Максим неверно

Ответ. Максим

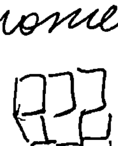
Почему Максим победит н/з от игры Димы?

Что может делать Дима и Максим?

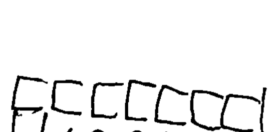
1) Заполнять все поле (без дырок) => побед Максим тк это опис пример в начале)

2) Делать дырки ~~в~~ площади ~~≤~~ 8, чтоб изменить четность (если убрат ~~ча~~ несколько клеток, то кол-во сыгранных змеек уменьшится)

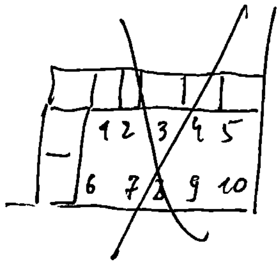
Змейка может ограничить

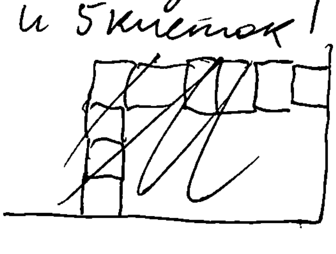


- одну клетку




- 6 клеток на "углу" и 5 клеток!



Если такое будет происходить, то довольно быстро будет вост. нужная четность, а тк Максим второй, то он ~~сможет~~ не доказано реагировать на действия Димы