ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101358194391

# Титульный лист

**Направление**
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [ ] 10 [x] 11

**Фамилия** БУРЛАКОВА

**Имя** ДАРЬЯ

**Отчество** ГРИГОРЬЕВНА

**Дата рождения** 30 12 2007

**Город участия** МАГНИТОГОРСК

**Аудитория** 14

**Дата** 02 02 2026 **Подпись** ДБурл

**Пример заполнения** АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101358194391

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление** ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история ■ математика ☐ обществознание ☐ русский язык ☐ физика ☐ химия

**Класс** ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ■ 11

**Город участия** МАГНИТОГОРСК

## Заполняется организаторами

Количество доп листов ☐☐ Количество черновиков к проверке ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ до ☐☐ ☐☐

## Протокол проверки

## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |

**Итоговый балл** 20

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения** А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Задание 1

Условие, $f(\overline{xy})$ – либо x, либо y

3 ненулевые цифры a, b, c

Найти сумму f по всем двузначным числам от 11 – 99

Случай 1 $a=b=c$

$f(aa)^3 = a^3 = f(aa) = a$

Случай 2 $a, b, c = a$

$f(aa)\,f(ab)\,f(ba) = a\,b\,a$

$a\ f(ab)\,f(ba) = a^2 b$

$f(ab) \cdot f(ba) = ab$ (при $a \neq b$)

Из $f(ab) \in \{a, b\}$ и $f(ba) \in \{b, a\}$ при $a \neq b$ есть только 2 варианта: $f(ab)=a$, $f(ba)=b$

$f(b) = b$, $f(ba) = a$

В любом случае $f(ab) + f(ba) = a+b$

Теперь считаем сумму S по всем ab (a, b от 1 до 9)

Сумма по диагонали $a=b$

$f(11) + f(22) + \ \ + f(99) = 1+2+\ \ +9 = 45$

Сумма по всем $a \neq b$) Рассмотрим все пары $(ab, ba)$ с $a \neq b$

Для каждой такой пары $f(ab) + f(ba) = a+b$ ✓

Сумма всех таких пар $= \sum_{a \neq b}(a+b)$ – найдем через полную сумму всех $(a+b)$

Полная сумма $(a+b)$ по всем a, b от 1–9:

Каждое a встречается 9 раз $9(1+2+\ \ +9) = 9\ 45 = 405$

Каждое b встречается 9 раз ещё 405

Тогда $\sum_{a=1}^{9}\sum_{b=1}^{9}(a+b) = 9\ 45 + 9\ 45 = 810$

Вычтем диагональ $a=b$

$\sum_{a=b}(a+b)=\sum_{a=1}^{9}2a=90$

Значит, сумма на $a\neq b$ ⊕

$810-90=720$

~~каждая неупорядоченная пара (ab, ba) появляется дважды~~

$$\sum_{a\neq b} f(ab)=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}(f(ab)+f(ba))=\frac{1}{2}\sum_{a\neq b}(a+b)=\frac{1}{2}\,720=360$$

Тогда вся сумма S $\quad S=\sum_{диаг}f+\sum_{a\neq b}f=45+360=\underline{405}$

Ответ 405

Задание 2

Всего клеток на поле $2025^2$

Т к 2025 нечетное, $2025^2$ нечётное, при делении на 8 даёт остаток 1

$2025^2=8k+1$

Каждый ход занимает 8 клеток Игра закончится, когда останется меньше 8 клеток Из равенства $8k+1$ ясно, что после k ходов останется 1 клетка

2025 : 16 = 126 (ост 9), $9^2=81$, 81 : 16 = 5 (ост 1)

Значит, $2025^2-1=0 \Rightarrow k=\frac{2025^2-1}{8}$ четно

Поскольку k четно, последний (k-ый) ход делает второй игрок (Максим) После него останется одна клетка и Дима не может сделать ход ⊖

Ответ <u>Максим</u> выигрывает независимо от игры

Задание 3

1) Возможных центров для крестов 64 − 8 4 = 36

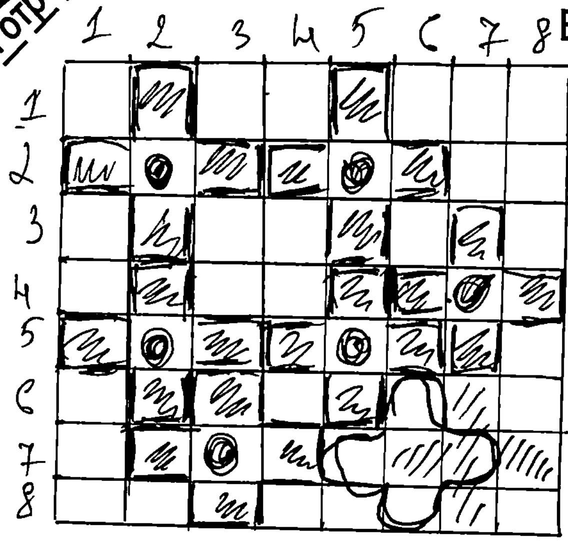
2) Вырезаем несколько крестов, после этого ни один из 36 центров не должен иметь 5 своих клеток целыми

3) Если крестов 5, то какой-то крест останется целым

4) Минимально можно вырезать <u>6 крестов</u>, т к после них нельзя вырезать ни одного нового

Линия отреза

Бланк ответов



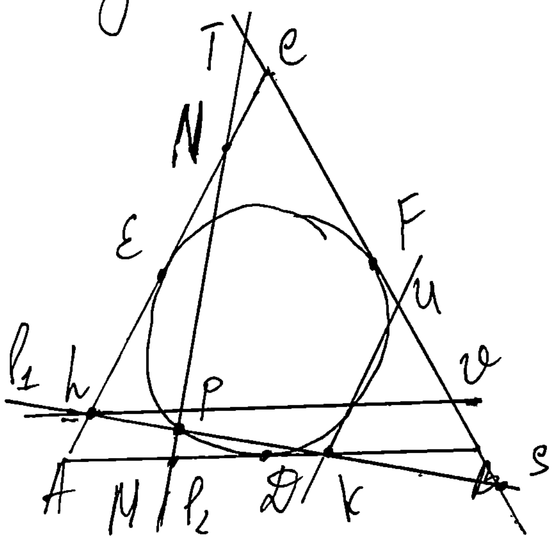

После вырезания 6 крестов ни один из оставшихся возможных центров не сможет образовать целый крест — хотя бы одна из его 5 клеток уже будет удалена

✓ неверный пример на 6 крестов

(−)

Ответ 6.

Задача 4




$BS = CT$

$KU \parallel AC$ (п)

$\triangle ABC$ — равност

$MK = BU$ (из равенства углов 60° и подобия)

$LV \parallel AB$ (п)

$LN = CV$

(−)

Т.к. $l_1 \perp l_2$, $BC = CT$ ⇒ BU и CV расположены ~~симметрично на BC и их~~ нет

сумма равна ST

Значит, $MK + LN = BU + CV = ST$

ч т д

Задача 5

Чтобы корни были в соседних интервалах A и B, между ними должна лежать хотя бы одна точка $t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Если $t = 1$ между корнями $x_1 \in (0,1) \subset A$, $x_2 \in (1,2) \subset B$

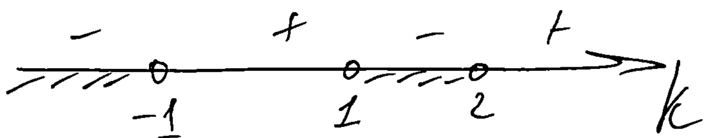
Условие и t между корнями и для квадратного трёхчлена

$f(x) = (k-2)x^2 + (k-1)^2 x + k$: $(k-2)\,f(1) < 0$

$f(1) = k^2 - 1$

$(k-2)(k^2-1)<0$

Метод интервалов




$k \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$

Пусть ~~k~~ $a = k-2 < 0$, тогда $f(1) > 0 \Rightarrow k < -1$ или $k > 1$

$f(0) < 0$ (чтобы корень был в $(0, 1)$ при $a < 0$) $\Rightarrow k < 0 \Rightarrow k < -1$

$f(2) < 0 \Rightarrow 2k^2 + k - 6 < 0 \Rightarrow -2 < k < 1,5$

Пересечем

$k < -1$ и $-2 < k < 1,5 \Rightarrow -2 < k < -1$

$(-2, -1)$

существенных продвижений нет

Ответ: $(-2, -1)$

Линия отреза

Бланк ответов