ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101034231461

# Титульный лист

**Направление**

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс** [ ] 8 [ ] 9 [x] 10 [ ] 11

**Фамилия** БАТАЛОВ

**Имя** МИХАИЛ

**Отчество** АЛЕКСАНДРОВИЧ

**Дата рождения** 05 04 2009

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** 532

**Дата** 02 02 2026 **Подпись** Бат

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101034231461

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление**
- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

**Класс**
- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с 11 48 до 11 52

## Протокол проверки
## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 0 | 17 | 3 | 0 | 0 | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 0 | 17 | 3 | 0 | 0 | | | | | |

**Итоговый балл** 20

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

Неверно понято условие

№1 Дано: $f(\overline{ab}) = a$ или $b$

$f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca}) = abc$ для любых $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Найти $f(11) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99)$

Решение: Из $f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bc}) \cdot f(\overline{ca})$ получаем что abc может быть равно

$a \cdot b \cdot c = a\ b\ c$
a b·a
a c c
a c a
b b c
b·b a
b c·c
b c·a = a b c

очевидно, что a·b·c = a·b·c Но если подбирать другие варианты, то значения могут быть разными. Докажем что $f(\overline{ab}) = a$, $f(\overline{bc}) = b$, $f(\overline{ca}) = c$ или $f(\overline{ab}) = b$, $f(\overline{bc}) = c$, $f(\overline{ca}) = a$ Пусть a = 1, b = 3, c = 5 Тогда abc = 15, aba = 3; acc = 25, aca = 5; bbc = = 45; bba = 9; bcc = 75; bca = 15 = abc => исключим все", кроме abc и bca => выбирать либо только первую цифру, либо только вторую

Последовательность можно представить как 5·1+5·2+5·3+5·4+5·5+5·6+5·7+5·8+5·9 = 5+10+15+20+25+30+35+40+45 = 225; или 9·1+9·3+9·5+9·7+9·9 = 9+27+45+63+81 = 225 Т.к в обоих случаях сумма равна 225, то и $f(11) + \ldots + f(19) + f(21) + \ldots + f(29) + \ldots + f(91) + \ldots + f(99) =$ ~~225~~ 225

Ответ: значение суммы равно 225

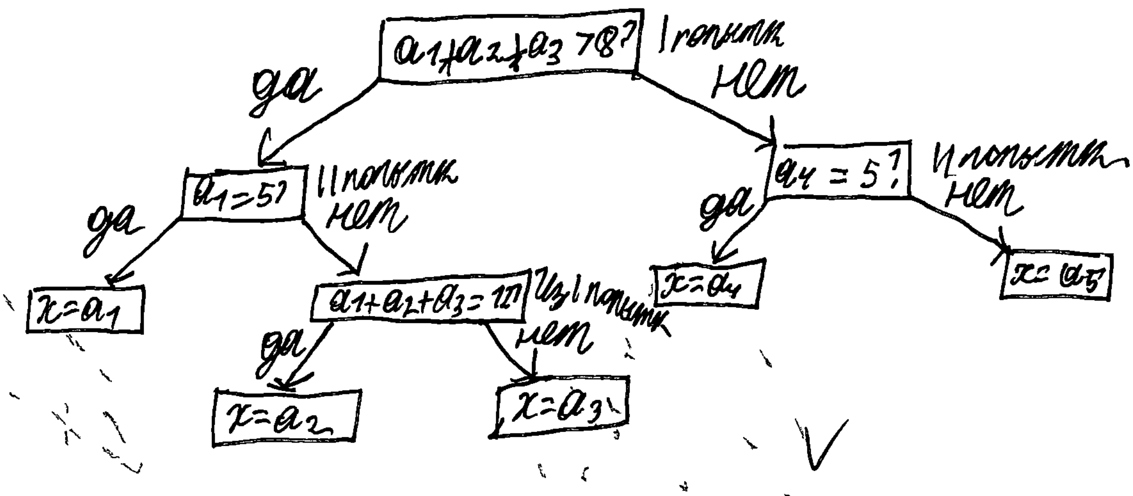
№2.

Воспользуемся разницей не более 2 и тем, что в них 1+2+3+4+5 = 15

Сначала возьмем первые 3 мешочка. Если монет 6 или 7, то мешок с 5 монетами (обозначим x) на месте 4 или 5, в таком случае во второй попытке берем мешок 4. Если это мешок x (5 монет), то он 4-ый, если нет, то x стоит на месте 5. 8 монет не может быть из-за противоречия условиям. Если от 9 до 12 монет, то мешок x среди них, в таком случае может быть 531, 532, 534, 542, 543, 354, 453, 245, 235, 135. В таком случае во 2-ой попытке берем 1-ый мешок. Если 5 монет, то x на месте 1. Если нет, то если в первой попытке (первые 3 мешка) было 12 монет, то x на месте 2, если нет, то x на месте 3. Схема не продолжения? почему?

~~Сх~~ Схема (на 2 попытки)

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$




№3

Дана последовательность $a_1, a_2, a_3$ и т.д., где $a_i \in N$ при $\forall i \in N$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n+a_{n-1}$ - составное, причём $a_n$ - наименьшее, ещё не встречавшееся ранее число и $a_n \in N$.

Доказать: $M=\{a_1, a_2, a_3\}=N$

Док-во. Предположим, что $a_k$ известно, тогда рассмотрим $a_k+(a_k+1)=(2a_k)+1$. Если $(2a_k)+1$ - составное, то $a_{k+1}=(a_k)+1$. Если $(2a_k)+1$ - простое, то $a_{k+1}=(a_k)+2$ (и что с того?), т.к. $(2a_k)+2$ очевидно чётное => составное. Тогда проверим $(2a_{k+1})-1=(2a_k)+3$. Если оно составное, то $a_{k+2}=(a_{k+1})-1$, и $a_{k+3}=(a_{k+2})+2$ (условие очевидно выполняется т.к. $a_{k+3}$ здесь имеет одинаковую чётность с $a_{k+2}$). Если $(2a_{k+1})-1=(2a_k)+3$ - простое, то по правилам делимости на 3 $(2a_k)+5$ составное => $a_{k+2}=(a_{k+1})+1$ (т.к. $a_{k+2}+a_{k+1}=2a_k+3+a_k+2=2a_k+5$) + $a_{k+3}=(a_{k+2})-2$ (условие очевидно выполняется) (из-за одинаковой чётности) и $a_{k+4}=(a_{k+3})+3$ (т.к. $a_{k+3}+a_{k+4}=a_k+1+a_k+4=2a_k+5$).

В результате получаем следующие последовательности. Наглядно

$a_i$ коэф $|a_j-a_k|$

$a_k \xrightarrow{+1} a_{k+1}$
0 1

$a_k \xrightarrow{+2} a_{k+1} \xrightarrow{-1} a_{k+2} \xrightarrow{+2} a_{k+3}$
0 2 1 3

$a_k \xrightarrow{+2} a_{k+1} \xrightarrow{+1} a_{k+2} \xrightarrow{-2} a_{k+3} \xrightarrow{+3} a_{k+4}$
0 2 3 1 4

В результате я ~~узнал~~ доказал, что последовательность включает в себя все $x \in N$, => $M=N$, ч.т.д.

Линия отреза

## Бланк ответов

~~№4~~ №5

Дано: фигуры ~~ладьи~~ ладья и слон, ~~они~~ и доска $2n\times 2n$. Они не должны бить друг друга ~~3ад~~

Найти: кол-во способов

Решение: т.к. ладья бьет все клетки по горизонтали и вертикали, а слон — по обеим диагоналям, то ладья и слон не должны стоять на той же горизонтали, вертикали и диагонали. Тогда пусть заменим ~~ладь~~ количество способов расставить ладью и слона на количество клеток, которое не будет бить фигура ферзь (ферзь бьет все клетки по горизонтали, вертикали и обеим диагоналям), ~~итак~~, т.к. используем без ограничения ~~фигу~~ общности фиксированное положение ладьи и нефиксированное положение слона. Пусть $x$ — сумма кол-во атакованных клет

База: При $n=1$, $x=0$, т.к. ферзь бьет по всем клеткам ?

$n=2$: $x=((2\cdot 2)^2-4)\,6+\cancel{2}(2(2-1))^2\cdot 4 = 12\cdot 6+4\cdot 4=72+16=88$ ✓

~~правило~~

Шаг: $x_{(n+1)}=x_n+8(2(n-1))^2+(6n-2)(8n-4)=8x_n+80n^2-104n+40$

$\Rightarrow$ ~~спос~~ ~~количе~~ ~~атакованных~~ пусть $y$ — кол-во способов расставить ладью и слон $\Rightarrow y_{(n+1)}=\cancel{(2n)^6}\,(2n)^4-(x_n+80n^2-104n+40)=(2n^4)-\cancel{8x_n}-80n^2+104n-40$, ~~где~~ $x_n=$ ~~количество~~

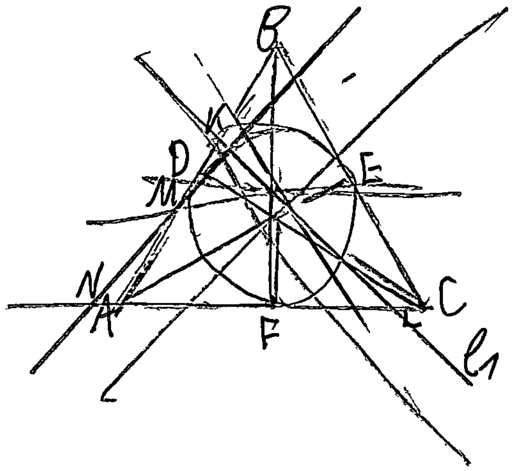
$=(2n)^4-\cancel{8x_n}\,x_{n-1}-80n^2+104n-40$

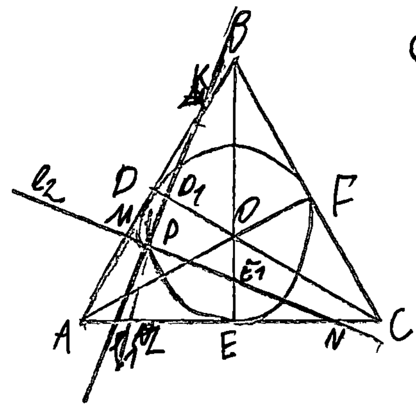
переход индукц не доказан

~~$y_n=(2n)^4$~~

$y_n=16n^4-x_{n-1}-80n^2+104n-40$

№4




Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC=AC$, окр вписанная, $D \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$; $P \in \cup DE$, $AM=BK$

Док-ть: ~~AN~~ $=AL=CN$

Док-во Сначала т.к $ABC$ - равно~~бедренный~~ сторонний, то медианы = биссектрисы = высоты. Т.к центр окр $O$ = точка пересечения биссектрис, то и точка пересечения медиан $R$ окр $=OD=OE=OF \Rightarrow$

$AF=BE=CD$ - биссектрисы $\Rightarrow$ медианы $\Rightarrow AD=DB=BF=FC=CE=AE$.

Т.к ~~A~~ $=AM=BK$, ~~то~~ и ~~AD=BK~~, $AD=BD$, то и $MD=KD$

~~Пусть~~ $D_1=CD \cap l_1$, $E_1=BE \cap l_2$

~~Рассмотрим 4-угольник~~

Т.к прямые перпендикулярны, то $\angle AMP=\angle ALP$, и $\angle MBP=\angle ANL$, $\Rightarrow$

$\angle KMP=\angle NLP \Rightarrow \triangle KMP \sim \triangle NLP$. Т.к $\triangle$ ~~A~~ $l_1 \perp l_2$, то ~~ACN=BK~~,

$AL=AM \Rightarrow$ т.к $AM=BK$, то и $AL=CN$, чтд

⊖

?

нет

Линия отреза

Бланк ответов