ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101440225680

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Фамилия КОРОЛЕВ

Имя НИКИТА

Отчество ЭДУАРДОВИЧ

Дата рождения 15 04 2009

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 457

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

3101440225680

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [x] 10
- [ ] 11

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов ☐☐ Количество черновиков к проверке ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ до ☐☐ ☐☐

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	20	20	–	–					
Балл члена жюри №2	20	20	20	-	-					

Итоговый балл 60

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№1

Заметим, что

$f(\overline{aa})=a$

$f(\overline{bb})=b$

$f(\overline{cc})=c$

Потому что для каждого двузначного числа значение функции равно одной из цифр этого числа, а если двузначное число состоит из одинаковых цифр, то какую бы не выбирать функция будет равна последней цифре неверно

Для любых трех ненулевых цифр a, b, c верно равенство

$f(\overline{ab})\ f(\overline{bc})\ f(\overline{ca})=abc$

Пусть $a=b$

Тогда $f(\overline{aa})\ f(\overline{ac})\ f(\overline{ca})=a^2c$

Мы уже доказали, что $f(\overline{aa})=a$ заменим

$a\ f(\overline{ac})\ f(\overline{ca})=a^2c$

$f(\overline{ac})\ f(\overline{ca})=ac$

1) $f(\overline{ac})=a$ и $f(\overline{ca})=c$

2) $f(\overline{ac})=c$ и $f(\overline{ca})=a$

Здесь может быть только эти два случия, ведь если $f(\overline{ac})$ и $f(\overline{ca})$ будут давать одну и туже цифру, то неравенство не выполнется при $a\neq c$

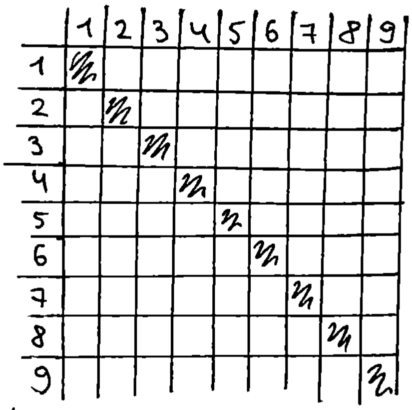
Заметим, что какой бы из случаев 1 или 2 мы бы не выбрали, у нас сохраняется сумма $f(\overline{ac})+f(\overline{ca})=a+c$ √

Для чисел вида $f(\overline{aa})=a$ пары не будет

Эти числа 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

А для чисел вида $f(\overline{ac}) = f(\overline{ca})$ всегда будет пара

Эта пара всегда будет находится, потому что если мы рассмотрим таблицу, то заметим что для чисел в отмеченной диагонали пар не будет, а для всех остальных пара обязательно найдется



Нужно найти сумму $f(11) + \quad + f(19) + f(21) + \quad + f(29) + \quad + f(91) + \quad + f(99)$

Тогда каждую функцию можно приравнивать к последней цифре, тк $f(\overline{aa}) = a$ + $\left(f(\overline{ac}) = c + f(\overline{ca}) = a\right)$ и тогда сумма будет оставаться неизменной

~~[illegible]~~ груп последних единиц = 9

Последняя цифра может принимать значения $\{1,2,3,4\ 5,6,7,8,9\}$

Тогда, чтобы найти сумму надо $9\ (1+2+3+4+5+6+7+8+9) =$

$= 9\ 45 = 405$

+

Ответ сумма = 405

№2

У нас есть 5 мест $\underset{1}{\_}, \underset{2}{\_}, \underset{3}{\_}, \underset{4}{\_}, \underset{5}{\_}$

Первый вопрос Сколько суммарно монет ~~[illegible]~~ в мешочках первых трех ~~[illegible]~~ ?

Рассмотрим все возможные ~~[illegible]~~ случаи первых трех мешочков и п считаем суммы

1) Если 1 стоит в середине

2 1 3 $\quad \Sigma = 6$

В ячейки 1 и 3 положить 4 или 5 монет нельзя, так как разница (единицы) и (4 или 5) больше двух

~~От перестановки мест двойки и тройки сумма не меняется и возможность построить пример остается тк если справа 3 т может быть 45 или 54, если справа 2 то может быть 18~~

√2 1 3 − √21345, √21354 $\quad \Sigma = 6$

√3 1 2 − √31245, (× 31254 тк 2 не может стоять с 5 разница больше двух) $\Sigma = 6$

Линия отреза

Бланк ответов

2) Если 2 стоит в середине

✓ 1 2 3 – 12345, 12354 $\underline{\Sigma = 6}$

× 3 2 1 – нельзя, тк единица будет рядом с 4 или 5

× 3 2 4 – нельзя, тк 1 будет рядом с 5

× 4 2 3 – нельзя, тк 1 будет рядом с 5

✓ 1 2 4 – 12435, 12453 $\underline{\Sigma = 7}$

✓ 4 2 1 – ✓42135, (42153 × нельзя, тк 1 рядом с 5) $\underline{\Sigma = 7}$

В ячейки 1 и 3 положить 5 монет нельзя, тк разница 2 и 5 больше двух

3) Если 3 стоит в середине

✓ 1 3 2 – ✓13245, (13254 ×, тк 25) $\underline{\Sigma = 6}$

× 2 3 1 – × с 1 буд т стоять 4 или 5

× 1 3 4 – × с 2 будет стоять 5

× 4 3 1 – × с 2 будет стоять 5

✓ 1 3 5 – ✓13542, (×13524 тк 52) $\Sigma = 9$

✓ 5 3 1 – ✓53124, (×53142, тк 41) $\Sigma = 9$

× 2 3 4 – × с 1 будет стоять 5

× 4 3 2 – × с 1 будет стоять 5

× 2 3 5 – × с 1 будет стоять 4

× 5 3 2 – × с 1 будет стоять 4

× 4 3 5 – × с 5 будет стоять (1 и 2)

✓ 5 3 4 – ✓53421, (×53412 тк 41) $\underline{\Sigma = 12}$

4) Если 4 стоит в середине

× 2 4 3 – × тк 1 не стоит с 5

× 3 4 2 – × тк 1 не стоит с 5

✓ 2 4 5 – ✓24531, (× 24513, тк 51) $\underline{\Sigma = 11}$

✓ 5 4 2 – ✓54231, ✓54213 $\underline{\Sigma = 11}$

× 3 4 5 – × тк 5 не стоит с 1 или 2

✓ 5 4 3 – ✓54321, ✓54312 $\underline{\Sigma = 12}$

В ячейки 1 и 3 положить 1 монету нельзя, тк разница 4 и 1 больше двух

5) Если 5 стоит в середине

В ячейки 1 и 3 положить 1 или 2 монеты нельзя, тк разница больше двух

✓ 3 5 4 – ✓ 35421, (× 35412, тк 1 не стоит с 4) $\underline{\Sigma = 12}$

✓ 4 5 3 – ✓ 45321, ✓45312 $\underline{\Sigma = 12}$

Σ может принимать значения 6, 7, 9, 11, 12

Второй вопрос будет зависеть от полученной суммы <u>если</u> $\underline{\Sigma < 9}$, то есть 6 или 7, то тогда пять монет может лежать или в 4 или в 5 ячейке Спрашиваем <u>Сколько монет в пятой ячейке?</u>, если 5, то (я – у5) её и выбираем, если другой ответ, выбираем четвертую ячейку

✓

Если $\Sigma \geq 9$, то есть 9, 11 или 12, то

если $\Sigma = 12$ по перебору 5 может стоять только в 1 и 2 ячейке, спрашиваем Сколько монет в первой ячейке? ✓

Если 5 выбираем 1 ячейку, если другой ответ выбираем 2 ячейку

если $\Sigma = 11$ по перебору 5 может стоять только в 1 и 3 ячейке, спрашиваем Сколько монет в первой ячейке? ✓

Если 5 выбираем 1 ячейку, если другой ответ выбираем 3 ячейку

если $\Sigma = 9$ по перебору 5 может стоять только в 1 и 3 ячейке, спрашиваем Сколько монет в первой ячейке? ✓

Если 5 выбираем 1 ячейку, если другой ответ выбираем 3 ячейку

Мы разобрали абсолютно все варианты и при любом, мы сможем за 2 вопроса найти мешочек с пятью монетами +

№3

Есть бесконечная последовательность a_1, a_2, a_3, a_4

Решим методом от обратного

Предположим, что есть такое $t \in N$, которое не встретится в этой последовательности Если у нас есть несколько чисел, которые не встретятся, тогда мы рассматриваем наименьшее из них, и оно t

Значит, числа от $(1, 2, \; t-1)$ уже встретились в последовательности

Рассмотрим два случая, сначала когда t — четное

После этих чисел $(1, 2, \; , t-1)$ не может идти четное число, ведь если a_{n-1} = четное, тогда $a_{n-1} + a_n$ — составное, делится на 2

a_n будет равен t, тк a_n — наименьшее, не встречавшееся ранее, натуральное число, а мы знаем, что $(1, 2, \; , t-1)$ уже встречались,

Тогда, после этих чисел должны идти только нечетные ✓

Бланк ответов

Но если мы рассмотрим последовательность нечетных, то заметим делимость на 3

$\overset{\swarrow \text{нечетное}}{a_n}$, a_n+2, a_n+4,

~~Нужно получить~~ Надо, чтобы $S = a_n + t$ – не было составным числом, тогда заметим

$S_1 = a_n + t$ $\quad S_2 = a_n + 2 + t = S_1 + 2$ $\quad S_3 = a_n + 4 + t = S_1 + 4$

S_1, $S_1 + 2$, $S_1 + 4$

Рассмотрим по модулю трех

1) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 0$ $\quad$ 2) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 1$ $\quad$ 3) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 2$

$S_1 + 2 \underset{3}{\equiv} 0$ $\quad$ $S_1 + 2 \underset{3}{\equiv} 1$

$S_1 + 4 \underset{3}{\equiv} 0$

Тогда каждое третие число будет делится на 3, а значит будет составным, и тогда мы не пропустим t и оно ~~не пропустим~~ войдет в последовательность

Теперь случай когда t – нечетное

После чисел $(1, 2, \; t-1)$ не могут идти нечетные числа, тк если a_{n-1} = Нечетное, то при проверке нечетного t $\; Н + Н = Ч$ (Четное = составное) и тогда t станет в последовательность, значит после этих чисел идут только Четные числа

Но если мы рассмотрим последовательность четных, то заметим делимость на 3

$\overset{\swarrow \text{четное}}{a_n}$, a_n+2, a_n+4,

Надо, чтобы $S = a_n + t$ – не было составным числом, тогда заметим

$S_1 = a_n + t$ $\quad S_2 = a_n + 2 + t = S_1 + 2$ $\quad S_3 = a_n + 4 + t = S_1 + 4$

S_1, $S_1 + 2$, $S_1 + 4$

И рассматривая также по модулю трех

1) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 0$ $\quad$ 2) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 1$ $\quad$ 3) Если $S_1 \underset{3}{\equiv} 2$

$S_1 + 2 \underset{3}{\equiv} 0$ $\quad$ $S_1 + 2 \underset{3}{\equiv} 1$

$S_1 + 4 \underset{3}{\equiv} 0$

Тогда каждое третие число будет делится на 3, то есть будет составным и тогда мы не пропустем t и оно войдет в последовательность

Получается, что изначальные предположение оказалось не верно и тогда не найдется, такого числа t, которое не встретится

Получается ЧТД, в этой последовательности встретятся все натуральные числа +