ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026551132363

Титульный лист

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс

- [ ] 8
- [ ] 9
- [ ] 10
- [x] 11

Фамилия	УМИРБАЕВ
Имя	НАИЛЬ
Отчество	АСЛАИБЕКОВИЧ
Дата рождения	13 07 2008
Город участия	УФА
Аудитория	9-501

Дата 02 02 2026

Подпись

Пример заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

2026551132363

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

- [ ] анализ данных
- [ ] информатика
- [ ] история
- [x] математика
- [ ] обществознание
- [ ] русский язык
- [ ] физика
- [ ] химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия УФА

Заполняется организаторами

Количество доп листов ☐☐ Количество черновиков к проверке ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ до ☐☐ ☐☐

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	3	20	0	-	20					
Балл члена жюри №2	3	20	0	-	20					

Итоговый балл 43

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Линия отреза

Бланк ответов

№1

Случ. трёх одинаковых цифр возможен когда ~~в второго~~ $a=b=c$. Из второго условия получаем $f(\overline{aa}))^3 = a^3$

~~Исследов общ. случаи показал, что функция не может для одних чисел выбирать первую цифру, а для других вторую~~

Допустим противное. Найдутся 3 ~~ЯУР~~ цифры p, q, r такие что для некоторых из чисел $\overline{pq}$, $\overline{qr}$, $\overline{rp}$ функция берет первую цифру, а для остальных вторую. Рассмотрим пример $p=1, q=2, r=3$. Предположим что $f(12)=1$ и $f(23)=3$. Подставим в основное тождество, получим $1\cdot 3 \cdot f(31) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, откуда $f(31)=2$. Однако по первому условию $f(31)$ может равняться только 3 или 1 $\Rightarrow$ противоречие. Обозначим искомую сумму S. В сумму входят все двузначные числа с цифрами от 1 до 9. Всего $9\times 9 = 81$ слагаемое

Случай B_1: $f(\overline{xy}) = x$ $S = \sum_{x=1}^{9} 9x = 9(1+2+\dots+9) = 9\cdot 45 = 405$

Случай B_2: $f(\overline{xy}) = y$. $S = \sum_{x=1}^{9} 45 = 9\cdot 45 = 405$

частный случай

Ответ. 405

№2

Рассмотрим поле 2025×2025. Его размер нечетный, поэтому у него центральная клетка. Определим центральную симметрию относительно ЦКО, В каждой клетке X соответствует клетка X'

Первый ход, Дима ставит змейку
две симметричную как? Относительно О длиной 8,

ходе множество свободных их О. После этого
ричных относительно О клеток
свободной, и клетка симмет-

стратегия не описана и не доказана
Выигрышной стратегии остается в
но на ходы Максима: отвечает симметрич-
ставит ~~зм~~ Максим делает ход.
~~Дима~~ Дима змейку Z, целиком лежащую в S
клеток отвечает Z', состоящая из
на О симметричных клеткам Z относитель-
Т.к S симметрична
Z' свободны если бы, Z' ⊂ S Все клетки
занята ранее, то из-за симметричности из них была
дущих ходов, ее прообраз в Z тоже был бы всех преды-
занят, что невозможно, потому что Z стоит на
свободных клетках. Центральная симметрия сохра-
~~клетках~~ соседство по стороне, поэтому Z' тоже
няет длину 8. После удаления Z и Z' мно-
жество свободных клеток снова симметрично отно-
сительно О. Таким образом, Дима всегда может
ответить на любой ход Максима, а симмет-
рия свободных клеток сохраняется, не
продолжается, пока соседствующих
свободных клеток не менее 8. Перед каждым
ходом Максима клеток достаточно для змей-
ки. Он делает ход, Дима отвечает симмет-
ричной змейкой и удаляет еще 8 клеток
Т.к. число таких ходов четно, а второй
ход делает Дима, то он завершает игру

Ответ: выигрывает Дима

Линия отреза

Бланк ответов

№3

Для начала докажем, что может быть 4 того не меньше, докажем, что кол-во не может быть равно 3. Всего $8 \cdot 8 = 64$ клеток. Каждый крест блокирует $5+4+4=13$ клеток, центр креста расположить на границе, значит расположим $64-8-8-6-6=36$ клеток. Некоторые клетки мы посчитали дважды $36-3 \cdot 13 + 4 = 1$ значит остается свободная клетка. При 4 крестах свободных клеток нет.

оценка неверная

$$\frac{13 \cdot 4}{4} = 1, \quad \frac{4}{4} > 0,$$

Ответ: 4. как поставить эти 4 креста? —

№5

$(k-2)x^2+(k-1)^2x+k=0$ 2 корня

$A=(0,1)\cup(2;3)\cup(4;c)$

$B=(1,2)\cup(3,4)\cup(5,6)$

$x_1 \in A$

$x_2 \in B$

I при $k=2$ уравнение линейное

$x+2=0$

$x=-2$ $\notin A\cup B$

$\Downarrow$

$k \neq 2$

II по т. Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{(k-1)^2}{k-2} \\ x_1x_2=\dfrac{k}{k-2} \end{cases}$$

при $k>2$, $x_1 \cdot x_2 > 0$, а $x_1+x_2<0 \Rightarrow x_1<0$

при $0<k<2$, $x_1 x_2<0 \Rightarrow$ один корень $x_2>0$

при $k=0$, корни 0 и $\frac{1}{2}$ отриц.

Значит $k<0$ V доказано, но $\notin A\cup B$

III при $k<0$ $f(0)=k<0$

при $k<-1$, $f(1)=k^2-1>0$, значит один корень лежит на $(0,1)\subset A$

По теореме по промежутки знак в промежутке $(0, 1)$ корень существует когда
$f(0)\ f(1)<0$) v

IV $f(1) = k^2 - 1 > 0$

$f(2) = 2k^2 + k - 6$

$f(3) = 3k^2 + 4k - 15$

$f(4) = 4k^2 + 9k - 28$

$f(5) = 5k^2 + 16k - 45$

$f(6) = 6k^2 + 25k - 66$

$x_2 \in (1; 2)$

$2k^2 + k - 6 < 0$ (т.к. $f(1) > 0$

$-2 < k < -1$

существует корень на $(1, 2)$

$x_2 \in (3, 4)$

$\begin{cases} 3k^2 + 4k - 15 > 0 \\ 4k^2 + 9k - 28 < 0 \end{cases}$, при $(k - \frac{10}{3})(k+3) > 0$, при $4(k - \frac{7}{4})(k+4) > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow -4 < k < -3$, существует корень по отрезке $(3, 4)$

$\begin{cases} 5k^2 + 16k - 45 > 0 \\ 6k^2 + 25k - 66 > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} 5(k - 1{,}8)(k+5) > 0 \\ 6(k - \frac{22}{12})(k+6) > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow -6 < k < -5 \Rightarrow$ существует корень на $(5; 6)$ СВ

Ответ: $(-2; -1) \cup (-4, -3) \cup (-6, -5)$

+

Линия отреза

Бланк ответов