



2026123134570

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия

В А Х Р А Н Е В

Имя

С В Г Е Н И И

Отчество

Н И К О Л А Е В И Ч

Дата рождения

02 03 2003

Город участия

С К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория

Х Ч О 5

Дата

02 02 2026

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
 Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	8	5	—	0					
Балл члена жюри №2	20	8	5	—	0					

Итоговый балл

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

1) Нам известно, что $f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc$. Рассмотрим тогда

$f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca})$. Пусть $f(\overline{ab}) = a$. Тогда, чтобы в итоговом произведении присутствовал множитель b , $f(\overline{bc}) = b$, а тогда $f(\overline{ca}) = c$. Если же $f(\overline{ab}) = b$, то $f(\overline{ca}) = a$ и $f(\overline{bc}) = c$. В обоих случаях $f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) = a + b + c$. ✓

Заметим, что в условии не сказано, что a, b, c различны. Тогда при $c = a$ $f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) = f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) + f(\overline{aa}) = a + b + c = 2a + b$. Теперь заметим,

что $f(\overline{aa}) = a$, так обе цифры равны a . Тогда $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$.

$f(12) + f(21) = 2 + 1 = 3$ $f(13) + f(31) = 3 + 1 = 4$ $f(19) + f(91) = 1 + 9 = 10$. Общая сумма всех этих чисел $\frac{(10+3)(10+3+1)}{2} = 52$. Всего здесь $10 - 3 + 1 = 8$ сумм. Значит чисел 16.

$f(23) + f(32) = 2 + 3 = 5$ $f(24) + f(42) = 2 + 4 = 6$ $f(29) + f(92) = 11$. Сумма этих чисел $\frac{(11+5)(11+5+1)}{2} = 56$. Сумм здесь $11 - 5 + 1 = 7 \Rightarrow 14$ чисел.

$f(34) + f(43) = 3 + 4 = 7$ $f(35) + f(53) = 3 + 5 = 8$ $f(39) + f(93) = 3 + 9 = 12$. Сумма $\frac{(12+7)(12+7+1)}{2} = 57$.

Сумм здесь $12 - 7 + 1 = 6 \Rightarrow 12$ чисел.

$f(45) + f(54) = 4 + 5 = 9$ $f(46) + f(64) = 4 + 6 = 10$ $f(49) + f(94) = 4 + 9 = 13$. Сумма $\frac{(13+9)(13+9+1)}{2} = 55$.

Сумм здесь $13 - 9 + 1 = 5 > 10$ чисел.

$f(56) + f(65) = 5 + 6 = 11$ $f(57) + f(75) = 5 + 7 = 12$ $f(59) + f(95) = 5 + 9 = 14$. Сумма $11 + 12 + 13 + 14 = 50$.

Сумм здесь $4 - 7 = 8$ чисел.

$f(67) + f(76) = 6 + 7 = 13$ $f(68) + f(86) = 6 + 8 = 14$ $f(69) + f(96) = 6 + 9 = 15$. Сумма $13 + 14 + 15 = 42$.

$f(78) + f(87) = 7 + 8 = 15$ $f(79) + f(97) = 7 + 9 = 16$. Сумма $15 + 16 = 31$. 3 суммы $\Rightarrow 6$ чисел.

$f(89) + f(98) = 8 + 9 = 17$. 2 суммы $\Rightarrow 4$ числа.

$f(11) + f(22) + f(33) + f(44) + f(99) = 1 + 2 + 3 + 4 + 9 = 45$. 9 чисел.

Всего в сумме $f(11) + f(12) + f(99) = 9 + 9 - 11 - 3 + 1 = 81$ число. У нас $16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 9 \neq 2$.

$f(11) + f(12) + f(99) = 56 + 57 + 55 + 50 + 42 + 31 + 17 + 45 + 52 = 405$.

Ответ 405

$$5) A = (0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 5), B = (1, 2) \cup (3, 4) \cup (5, 6)$$

$$(k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$$

Заметим, что если мы найдем k корни x_1 и x_2 такие, что $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, то они оба положительны, ведь ни A ни B не содержат отрицательных элементов

Пусть $k > 2$. Тогда $k-2 > 0$, $k-1 > 0$, $k > 0$. Если мы найдем подходящие x_1 и x_2 , то $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Тогда $(k-2)x_1^2 > 0$, $(k-1)^2x_2 > 0$, $k > 0 \Rightarrow (k-2)x_1^2 + (k-1)^2x_2 + k > 0 \Rightarrow \Rightarrow$ противоречие. Значит $k \leq 2$.

Пусть $k = 2$. Тогда уравнение станет линейным, а у линейного уравнения не может быть больше 1 корня. Значит $k \neq 2$.

Пусть $k \in [0, 2)$ и мы найдем подходящие корни. Тогда по теореме Виета $x_1, x_2 = \frac{k}{k-2}$. При $k \in [0, 2)$ $k-2 < 0$, $k > 0 \Rightarrow \frac{k}{k-2} < 0$. $x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_1, x_2 > 0$.

Противоречие $\Rightarrow k < 0$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{-(k-1)^2}{k-2}$

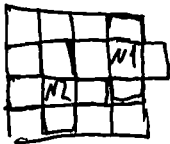
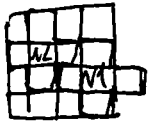
$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = \frac{k}{k-2} - \frac{-(k-1)^2}{k-2} = \frac{k + (k-1)^2}{k-2} = \frac{k^2 - k + 1}{k-2}$$

$k^2 - k + 1$ - неполный квадрат разности $\Rightarrow k^2 - k + 1 > 0$ при $k \in \mathbb{R}$

$k < 0 \Rightarrow k-2 < 0$. Тогда $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow x_1 + x_2 > x_1 \cdot x_2$

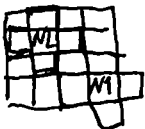
Линия отреза

3) Докажем, что меньше 4 крестов использовать не удастся.
 Разобьем доску 8×8 на 4 квадрата 4×4 . Если кресты не выходят за рамки этих квадратов, то в каждом квадрате можно будет вырезать хотя бы 1 крест, и всего будет вырезано ^{хотя бы} 4 креста. Теперь рассмотрим случай, если крест выходит за рамки своего квадрата. Заметим, что крест может выходить за рамку квадрата либо 1 клеткой, либо ^{не только} 4-мя. Если крест выходит за рамку квадрата 4-мя клетками, то будем считать его крестом другого квадрата, из которого он выступает 1 клеткой. Тогда покажем, что если крест выходит за рамки квадрата, в нем можно будет вырезать еще 1 крест.



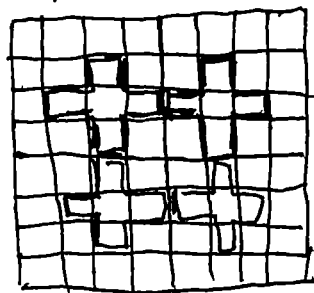
Аналогично с других сторон

Заметим, что крест может выходить за рамку и 2 клетками, но в разных квадратах. ^{похожие случаи} Значит в этом случае в квадрат тоже можно поместить 2 креста.



В остальных квадратах, рамки которых пересек крест, все еще можно вписать крест, ведь максимум могут быть заняты 2 граничные клетки, и в этом случае крест можно вырезать так  с точностью до поворота. Значит меньше 4 крестов использовать нельзя.

Пример на 4



- пример

F

2) Найдем выигрышную стратегию для Димы ~~Макс~~

Поскольку 2025-клеточная, у поля 2025×2025 есть центр. Первый ход Дима рисует змейку вокруг центра

1	2	3
3	4	4
7	6	5

После этого хода какую бы змейку ни нарисовал Максим, Дима сможет нарисовать такую же с точностью до поворота на 180° (симметрично по или зеркально)

Картишка

Максим рисует змейку 9-16

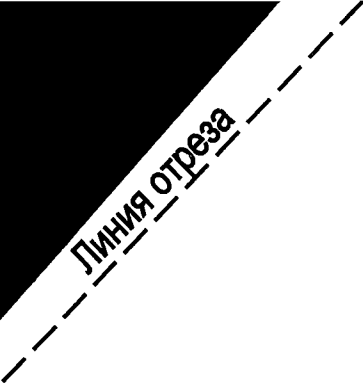
После Дима рисует змейку 17-24

10	11	12	13	14
9	1	2	3	15
24	8	4	4	16
23	7	6	5	17
22	21	20	19	18

Для каждой клетки доски, кроме центра, есть клетка, симметричная ей. Поскольку центральная клетка окружена закрашенными клетками, никакая змейка не будет ее содержать. ^{и не докажет} А значит какой бы набор клеток Максим ни выбрал бы для своей змейки, Дима может выбрать зеркальный набор. Поскольку если у Максима есть ход, то и у Димы есть. Значит проигрывает Максим, ведь иначе у Димы не нашлось бы ответа, но мы доказали, что он всегда есть.

Ответ выиграл Дима

+



Бланк ответов

