

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия Б У Р Б А Х

Имя С О Ф И Я

Отчество Е В Г Е Н Ь Е В Ч А

Дата рождения 2 2 0 8 2 0 0 8

Город участия Ч Е Л Я Б И Н С К

Аудитория 2 5 8

Дата 0 2 0 2 2 0 2 6

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

☐ анализ данных	☐ информатика	☐ история
☒ математика	☐ обществознание	☐ русский язык
☐ физика	☐ химия	

Класс

☐ 8	☐ 9	☐ 10	☒ 11
----------------------------	----------------------------	-----------------------------	--

Город участия

Ч	Е	Л	Я	Б	И	Н	С	К											
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	8	5	-	20					
Балл члена жюри №2	20	8	5	-	20					

Итоговый балл

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Бланк ответов

Линия отреза

Задание 1

Возьмем тройку чисел a, b, c $a \neq b$ и $a \neq 0$
 $b = c$ и $b \neq 0$
 $c \neq 0$

Согласно равенству

$$f(ab) \cdot f(bb) \cdot f(ba) = ab^2$$

$$\begin{cases} f(bb) = b \end{cases} \text{ (т.к. двузначное число с одинаковыми цифрами} \Rightarrow \text{выбирается "b" или "b")}$$

$$\Rightarrow f(ab) \cdot f(ba) = ab$$

Значит, $f(ab) + f(ba) = a + b$

Так как

$$\begin{cases} f(ab) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ f(ba) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ a \neq b \end{cases}$$

$\Rightarrow$ возможные $\checkmark$
 подходящие
 комбинации

$$\begin{cases} f(ab) = a \\ f(ba) = b \\ f(ab) = b \\ f(ba) = a \end{cases}$$

Получили 2 правила, на основании которых мы будем считать сумму

$$\begin{cases} f(bb) = b \\ f(ab) + f(ba) = a + b \quad (a \neq b) \end{cases}$$

$$f(11) + f(19) + f(21) + f(29) + f(31) + f(39) =$$

~~$$(f(11) + f(22) + f(33)) + (f(19) + f(91)) + (f(29) + f(92)) + (f(39) + f(93))$$~~

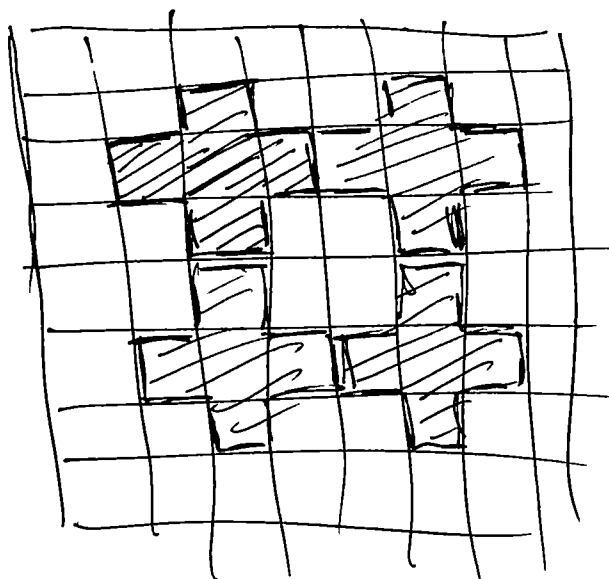
$$\begin{aligned} &= (f(11) + f(22) + f(33)) + (f(12) + f(21)) + (f(13) + f(31)) + \\ &+ (f(19) + f(91)) + (f(23) + f(32)) + (f(29) + f(92)) + \\ &+ (f(34) + f(43)) + (f(39) + f(93)) + (f(89) + f(98)) = \\ &= (1+9) + \cancel{(2+3)} + (1+2) + (1+3) + (1+9) + \\ &+ (2+3) + (2+9) + (3+4) + (3+9) + (8+9) = \\ &= \frac{9 \cdot 10}{2} + 1 \cdot 8 + (2+9) + 2 \cdot 7 + (3+9) + 8 \cdot 1 + 9 = 405 \end{aligned}$$

~~$$= 45 + 8 + 11 + 14 + 17 + 19 + 26 + 29 + 9$$~~

Задание 3

Оценка заметим, что в каждом квадрате 4×4 должен стоять ≥ 1 пятиклеточный крест (иначе в таком квадрате его можно вырезать).
Доску 8×8 можно разбить на 4 квадрата $4 \times 4 \Rightarrow$ можно вырезать хотя бы 4 креста

Пример



- пример

В такой конфигурации нельзя вырезать больше ~~4~~ пятиклеточных крестов и других?

—
+

Задание 2

Ответ выиграет Аня

Стратегия для ~~Ани~~ Ани

Первым ходом Аня должна найти самую центральную клетку доски (она находится на пересечении 1013 строки и 1013 столбца) и вокруг нее построить такую змейку

1	2	3
8	центр	4
7	6	5

→ центр - центральная клетка
1 8 - клетки змейки

назовем эту змейку центральной

Все остальные ходы Аня делает симметрично ходам Максима, симметрия относительно центральной змейки, которую Аня поставил первым ходом. Таким образом, после каждого хода Максима поле абсолютно симметричное относительно центральной змейки. Если Максим сможет сделать ход, то Аня тоже сможет (исходя из симметрии) ~~Аня сделает последний~~. Аналогично если Максим не может сделать ход, то Аня тоже $\Rightarrow$ Аня всегда делает последний ход и выигрывает.

Задание 5

$$(k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$$

$$(k-2)x^2 + (k^2 - 2k)x + (x+k) = 0$$

$$(k-2)x^2 + (k-2)kx + (x+k) = 0$$

$$(k-2)x(x+k) + (x+k) = 0$$

$$((k-2)x+1)(x+k) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+k=0 \\ (k-2)x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-k \\ x=-\frac{1}{k-2}, k \neq 2 \end{cases} \checkmark$$

Аналогично быть два несовпадающих корня $\Rightarrow k \neq \frac{1}{k-2}$

Отдельно разберем $k=2$
 $0x^2 + 1^2x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
 $\Rightarrow k=2$ не подходит

Линия отреза

$$\begin{cases} x = -k \\ x = -\frac{1}{k-2} \end{cases}$$

Бланк ответов

$$A = (0, 1) \cup (2, 3) \cup (4, 5)$$

$$B = (1, 2) \cup (3, 4) \cup (5, 6)$$

Обозначим каждый интервал своей
и будем смотреть на комбинации

I $x_1 \in 1$
 $x_2 \in 4 \Rightarrow$ 2 варианта

$$\begin{cases} 0 < -k < 1 \\ 1 < -\frac{1}{k-2} < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ -1 > \frac{1}{k-2} > -2 \quad | \cdot (k-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ -1(k-2) < 1 < -2(k-2) \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ -k+2 < 1 < -2k+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ -k+2 < 1 \\ -2k+4 > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 > k > -1 \\ 1 < k \\ 5 < 2k \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 0 < -\frac{1}{k-2} < 1 \\ 1 < -k < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > \frac{1}{k-2} > -1 \quad | \cdot (k-2) < 0 \\ -1 > k > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < 1 < -(k-2) \\ -1 > k > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < -k+2 \\ -1 > k > -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k < 1 \\ 1 > k > -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{-1 > k > -2}$$

Заметим $-k > -\frac{1}{k-2} \Leftrightarrow k \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2, 2\sqrt{2})$
Уб 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} -k > 2\sqrt{2} \\ -2 > -k > -2\sqrt{2} \end{cases}$

II $x_1 \in 1$
 $x_2 \in 5$

$$\begin{cases} 0 < -k < 1 \\ 3 < -\frac{1}{k-2} < 4 \quad | \cdot (k-2) < 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

В данном случае
 $x_1 < x_2$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ 3(k-2) > -1 > 4(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ 3k-6 > -1 \\ -1 > 4k-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ k > \frac{5}{3} \\ -1 > 4k-8 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 3 < k < 4 \rightarrow -4 < k < -3 \\ 0 < -\frac{1}{k-2} < 1 \quad | \cdot (k-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < k < -3 \\ 0 > -1 > k-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < k < -3 \\ -1 > k-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < k < -3 \\ -1 > k \end{cases} \Rightarrow k \in (-4, -3)$$

$$\text{III } x_1 \in 1 \\ x_2 \in 6$$

$$\begin{cases} 0 < -k < 1 \\ 5 < -\frac{1}{k-2} < 6 \end{cases} \mid \cdot (k-2) < 0$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ 5(k-2) > -1 > 6(k-2) \end{cases} \quad \text{unü}$$

$$\begin{cases} 0 > k > -1 \\ 5k > 1 \\ 11 > 6k \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 5 < -k < 6 \\ 0 < -\frac{1}{k-2} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < -\frac{1}{k-2} < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 < k < -5 \\ k < 1 \end{cases} \Rightarrow k \in (-6, -5)$$

$$\text{IV } x_1 \in 2 \\ x_2 \in 5$$

$$\begin{cases} 2 < -k < 3 \rightarrow -3 < k < -2 \\ 3 < -\frac{1}{k-2} < 4 \mid (k-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(k-2) > -1 > 4(k-2) \\ -3 < k < -2 \end{cases} \quad \text{unü}$$

$$\begin{cases} 3k > 5 \\ -3 < k < -2 \\ -1 > 4(k-2) \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 2 < -\frac{1}{k-2} < 3 \mid \cdot (k-2) < 0 \\ 3 < -k < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(k-2) > -1 > 3(k-2) \\ -4 < k < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k > 3 \\ -4 < k < -3 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{V } x_1 \in 2 \\ x_2 \in 6$$

$$\begin{cases} 2 < -k < 3 \rightarrow -3 < k < -2 \\ 5 < -\frac{1}{k-2} < 6 \mid (k-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < k < -2 \\ 5(k-2) > -1 > 6(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < k < -2 \\ 5k - 10 > -1 \\ -1 > 6k - 18 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \quad \text{unü}$$

$$= -2 \text{ (crossed out)}$$

$$\begin{cases} 2 < -\frac{1}{k-2} < 3 \\ 5 < -k < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(k-2) > -1 > 3(k-2) \\ -6 > k > -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k - 4 > -1 \\ -6 < k < -5 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{VI } x_1 \in 2 \\ x_2 \in 4$$

$$\begin{cases} 2 < -k < 3 \\ 1 < -\frac{1}{k-2} < 2 \end{cases}$$

unü

$$\begin{cases} -3 < k < -2 \\ k-2 > -1 > 2(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 < k < -2 \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\begin{cases} 2 < -\frac{1}{k-2} < 3 \\ 1 < -k < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(k-2) > -1 > 3(k-2) \\ -2 < k < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2k > -1 + 4 \\ -2 < k < -1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Дополнительный лист N 1

$$x_1 \in 3$$

$$x_2 \in 4$$

$$\begin{cases} 4 < -k < 5 \\ 1 < -\frac{1}{k-2} < 2 \mid (k-2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ k-2 > -1 > 2(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

или

$$\begin{cases} 4 < -\frac{1}{k-2} < 5 \\ 1 < -k < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(k-2) > -1 > 5(k-2) \\ -2 < k < -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k > 8-1 \\ -2 < k < -1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

УТН

$$x_1 \in 3$$

$$x_2 \in 5$$

$$\begin{cases} 4 < -k < 5 \\ 3 < -\frac{1}{k-2} < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ 3(k-2) > -1 > 4(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ 3k > 23-1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

или

$$\begin{cases} 4 < -\frac{1}{k-2} < 5 \\ 3 < -k < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(k-2) > -1 > 5(k-2) \\ -3 > k > -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k > 8-1 \\ -3 < k < -4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

УТ

$$x_1 \in 3$$

$$x_2 \in 6$$

$$\begin{cases} 4 < -k < 5 \\ 5 < -\frac{1}{k-2} < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ 5(k-2) > -1 > 6(k-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 < k < -4 \\ 5k > 10-1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

или

$$\begin{cases} 4 < -\frac{1}{k-2} < 5 \\ 5 < -k < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k > 8-1 \\ -6 < k < -5 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Отсюда } k \in (-2, -1) \cup (-4, -3) \cup (-6, -5)$$

+

