



Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия

У С Т И Н Е Н К О

Имя

Е Г О Р

Отчество

Т О М А С О В И Ч

Дата рождения

0 1 0 3 2 0 0 8

Город участия

Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория

М Ч 2 2

Дата

0 2 0 2 2 0 2 6

Подпись

Пример

заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия

Е	К	А	Т	Е	Р	И	Н	Б	У	Р	Г								
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

Заполняется организаторами

Количество доп. листов ☐☐ Количество черновиков к проверке ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ до ☐☐ ☐☐

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	0	20	5	-	-					
Балл члена жюри №2	0	20	20	-	0					

Итоговый балл

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Задача 1

Заметим, что $f(\overline{ab}) = f(\overline{(a-1)(b-1)}) + 1$ ~~или~~ т.е. $f(\overline{ab}) = a$
или $f(\overline{ab}) = b$, а $f(\overline{(a-1)(b-1)}) + 1 = a - 1 + 1 = a$ или $b - 1 + 1 = b$

Тогда мы можем преобразовать нашу сумму следующим образом.
Разобьем ее слагаемые на группы, в которых аргументы $f(x)$ отличаются на 11

$$\begin{aligned} & f(11) + f(22) + f(33) + f(44) + f(55) + f(66) + f(77) + f(88) \\ & f(12) + f(23) + f(34) + f(45) + f(56) + f(67) + f(78) + f(89) \\ & f(21) + f(32) + f(43) + f(54) + f(65) + f(76) + f(87) \end{aligned}$$

Преобразуем эти суммы, с помощью вышеописанного свойства.

$$f(11) + (f(11)+1) + (f(11)+2) + \dots + (f(11)+8) = 9f(11) + (1+2+3+\dots+8)$$

$$f(12) + (f(12)+1) + (f(12)+2) + \dots + (f(12)+7) = 8f(12) + (1+2+\dots+7)$$

$$f(21) + (f(21)+1) + (f(21)+2) + \dots + (f(21)+7) = 8f(21) + (1+2+\dots+7)$$

Сложим суммы в правой части

$$9f(11) + 8(f(12) + f(13) + \dots + f(21)) + (1+2+3+\dots+8) + 10(1+2+\dots+7)$$

Убедимся, что мы учли все слагаемые из исходной суммы

$$\text{Всего у нас функций } 9 + 8(21 - 12 + 1) = 89$$

А было $99 - 11 + 1 = 89$, т.е. мы полностью преобразовали исходную сумму, ничего не забыв. Было меньше. Было 81 т.к. мы не учли $\overline{aa}$

Упростим получившуюся сумму

$$\begin{aligned} & 9f(11) + 8(f(12) + f(21)) + \frac{(1+8)8}{2} + 10 \frac{(1+7)7}{2} = \\ & = 9f(11) + 8(f(12) + f(21)) + 36 + 280 = 9f(11) + 8(f(12) + f(21)) + 316 \end{aligned}$$

Воспользуемся свойством $f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc$ для $a=1, b=1, c=2$

$$f(11) f(12) f(21) = 2$$

$$f(12) f(21) = 2$$

Очевидно, что одна из функций равна 1, а вторая равна 2. В зависимости от того, какая функция чему равна, можно сказать, что $f(12) + f(21) = 3$

Теперь воспользуемся этим же свойством для $a=b=1$ и $c=3$:

$$f(11) + f(13) + f(31) = 3$$

$$f(13) + (f(20) + 1) = 3$$

Опять же, очевидно, что ~~один~~ один из множителей равен 3, а второй 1, но самое важное это $f(13) + f(20) + 1 = 4$ или $f(13) + f(20) = 3$

Продолжая использовать свойство для $a=b=1$ и $c \in \{4, 5, 6\}$,

Получим $f(14) + f(19) = 3$

$$f(15) + f(18) = 3$$

$$f(16) + f(17) = 3$$

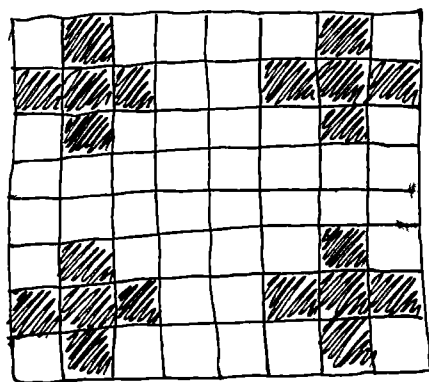
Вернемся к нашей преобразованной сумме

$$9f(11) + 8(f(12) + f(13) + f(14) + f(15) + f(16) + f(17) + f(18) + f(19) + f(20) + f(21)) + 316 =$$
$$= 9 + 8(3 + 3 + 3 + 3 + 3) + 316 = 325 + 8 \cdot 15 = 325 + 120 = 445$$

Ответ: 445

Задача 3

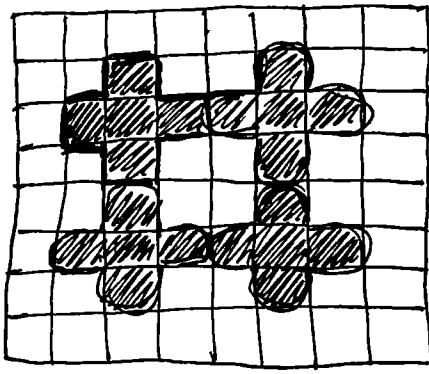
Рассмотрим следующие кресты, которые можно вырезать из доски 8×8



(выделены черным цветом)

Чтобы добиться цели, поставленной в задаче, нужно, чтобы эти выделенные кресты никак было вырезать. Для этого достаточно, чтобы хотя бы одна клетка у каждого из этих крестов отсутствовала (уже была вырезана). Заметим, что как бы мы не вырезали кресты из пяти клеток, мы сможем повредить только один из выделенных крестов (повредить — удалить хотя бы одну клетку у креста). А так как нам нужно повредить все 5 выделенных крестов, придется вырезать хотя бы 5 различных крестов из пяти клеток. При этом, вырезание ровно 5 крестов достаточно для достижения цели в задаче, если делать это таким образом

Бланк ответов



(вырезаем выделенные кресты)

Действительно, среди белых (не вырезанных клеток) нет ещё одного пяти-клеточного креста

Одним крест

Пример +

Ответ 4

Задача 5

Будем интерпретировать условие как

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ и } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(Если имелось ввиду что-то другое, то это — совсем не пометка, извините)

Предположим, что $x_1 = 0$

Найдём при каких „ k “ это возможно, подставив $x = 0$ в ур-ие:

$$k = 0$$

Подставим $k = 0$ и найдём x_2

$$-2x^2 + x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

$x_2 \notin B$, значит $x_1 \neq 0$

Предположим, что $x_1 = 1$, подставим

$$k - 2 + k^2 - 2k + 1 + k = 0$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$$k = \pm 1$$

Проверим $k = 1$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

~~$x_1 = 1$~~ $x_2 = -1 \notin B$ значит $k = 1$ не подходит

Проверим $k = -1$

$$-3x^2 + 4x - 1 = 0$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3} \notin B$ значит $k \neq -1$

Итого $x_1 \neq 1$

Предположим, что ~~$x_1 = 2$~~ $x_1 = 2$, подставим

$$2k^2 + k - 6 = 0$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$k = -2$$

нет

Проверим $k = \frac{3}{2}$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{3}{2} \notin B$$

Итого $x_1 \neq 2$

Предположим, что $x_1 = 3$

$$3k^2 + 4k - 15 = 0$$

$$k = \frac{5}{3} \quad k = -3$$

Проверим $k = \frac{5}{3}$

$$-3x^2 + 4x + 15 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -\frac{5}{3} \notin B$$

Итого $x_1 \neq 3$

Предположим, что $x_1 = 4$

$$4k^2 + 9k - 28 = 0$$

$$k = \frac{7}{4} \quad k = -4$$

Проверим $k = \frac{7}{4}$

$$-4x^2 + 9x + 28 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -\frac{7}{4} \notin B$$

Итого $x_1 \neq 4$

Предположим, что $x_1 = 5$

$$5k^2 + 16k - 45 = 0$$

$$k = \frac{9}{5} \quad k = -5$$

Проверим $k = \frac{9}{5}$

$$-5x^2 + 16x + 45 = 0$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{9}{5} \notin B$$

Итого $x_1 \neq 5$

Замечание: большинство работы с квадратными уравнениями проводилось на черновике, чтобы решение не занимало 5 листов

Итак, мы получили, что если $x_1 \in A$, то $x_2 \notin B$ всегда. Значит, искомого значения k не существует.

Ответ $k \in \emptyset$ —

Проверим $k = -2$

$$-4x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = \frac{1}{4} \notin B$$

Проверим $k = -3$

$$-5x^2 + 16x - 3 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = \frac{1}{5} \notin B$$

Проверим $k = -4$

$$-6x^2 + 25x - 4 = 0$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = \frac{1}{6} \notin B$$

Проверим $k = -5$

$$-7x^2 + 36x - 5 = 0$$

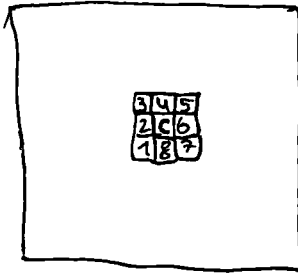
$$x_1 = 5 \quad x_2 = \frac{1}{7} \notin B$$

Задание 2

Победждает написанием, т.е. — Дима

Стратегия для Димы

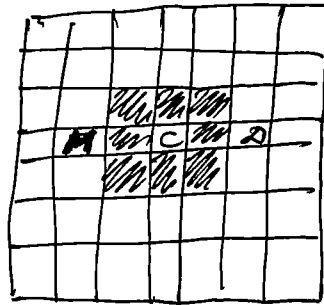
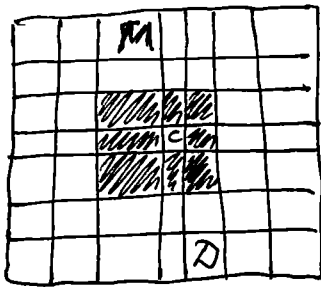
1 ход димы — построить змейку вокруг центрального квадратика так



* $\boxed{C}$ — центральный квадратик

После этого Дима ~~все~~ ^{Максим} остальными ходами делает так: для змейки, построенной ~~Максимом~~ ^{Максимом} назад, Дима рассматривает каждый квадратик такой змейки и строит свою, ^{симметрично} ~~опирает~~ эти квадратик сразу относительно центральной строки, а потом относительно центрального столбца.

Пример, как это происходит для 1 квадратика на маленькой доске



$\boxed{M}$ — квадратик, построенный Максимом

$\boxed{D}$ — квадратик, построенный Димой на следующем ходе

$\boxed{C}$ — центр кв

— квадратик самой первой змейки Димы

Так Дима опирает каждый квадратик Максимовской змейки

Почему Дима всегда может опразить змейку? Ответ —

— Потому что, за счет его первого хода никакая змейка Максима не может покрыть и ^{обычную} клетку и клетку, в которую должен положить Дима

Небольшой пример — пояснение

3	4	5	6	7
2				8
1		5		1
8				2
7	6	5	4	3

Клетки с одинаковой цифрой — ^{симметрично} симметричные относительно центральной строки и столбца.
~~Мног~~ Расстояние между всеми клетками с одинаковой цифрой — 9 (если шагать из клеток

в соседнюю), а длина змейки — 8. То действительно змейка не покрывает все симметричные клетки.

(Если клетки еще дальше от центра доски, то расстояние между симметричными клетками еще больше и принцип тот же)

Почему Дима выигрывает? Ответ — Если ~~было~~ Максим смог поставить змейку на какие-то клетки, то симметричные им еще свободны и у Димы есть ход всегда если он есть у ~~Макс~~ Максима. А если в какой-то момент у Максима не будет возможного хода, то Дима выигрывает, и т.д.

Ответ Дима.