



Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия К О Р О Т К О В

Имя Н И К И Т А

Отчество А Л Е К С Е Е В И Ч

Дата рождения 0 9 0 4 2 0 0 9

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

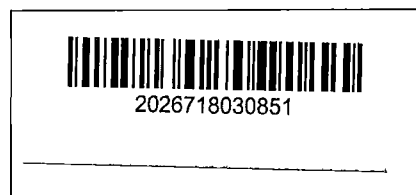
Аудитория М Т Ч О Р

Дата 0 2 0 2 2 0 2 6

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

☐ анализ данных	☐ информатика	☐ история
☒ математика	☐ обществознание	☐ русский язык
☐ физика	☐ химия	

Класс

☐ 8	☐ 9	☐ 10	☒ 11
----------------------------	----------------------------	-----------------------------	--

Город участия

Е	К	А	Т	Е	Р	И	Н	Б	У	Р	Г								
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

Заполняется организаторами

Количество доп листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	15	10	0	0	20					
Балл члена жюри №2	3	6	0	0	20					

Итоговый балл

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

Пример заполнения

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Задача 1

1) Найдем $f(aa)$ для одинак цифр
при $a = b = c$: $f(aa)^3 = a^3$, откуда $f(aa) = a$

2) Исследуем $f(ab)$ при $a \neq b$
Рассмотрим произвольную тройку a, b, c
 $f(ab) \quad f(bc) \quad f(ca) = abc$

Каждый элемент - либо 1, либо 2-я цифра

Перепробуем варианты

$f(ab)$	$f(bc)$	$f(ca)$	Произведение
a	b	c	$abc \quad \textcircled{1}$
b	c	a	$bca = abc \quad \textcircled{2}$

Остальные комбинации

Не равно abc

3) Докажем f - едино обратна

Допустим, $f(12) = 1$

Для тройки $(1, 2, c)$ и т.д., где $c \notin \{1, 2\}$

$$1 \quad f(2c) \quad f(c1) = 2c$$

Если $f(2c) = c$, то $f(c1) = 2$, но $f(c1) \in \{c, 1\}$ - противоречие

Значит $f(2c) = 2$

не доказано

Аналогично для всех пар

c - всегда первая цифра, либо c - всегда вторая цифра

1) Сумма

Для $f(ab) = a$ (первая цифра)

$$S = \sum_{a=1}^9 \sum_{b=1}^9 a = \frac{9 \cdot 9 \cdot 10}{2} = 9 \cdot 45 = 405$$

I

Для $f(a,b) = b$ (вторая цифра)

$$S = \sum_{a=1}^9 \sum_{b=1}^9 b = 9 \cdot 45 = 405$$

Обе функции дают одинаковую сумму = 405

Ответ 405

Задача 2

Поле 2025^2 - центр клетки (10131013)

Количество клеток $2025^2 = 4100625 \neq 4 \neq (8 \cdot 5125 \cdot 8) \neq 1$

При идеальном заполнении остается ровно 1 клетка

2) Стратегия для Димы

Первый ход - Дима может занять любую центральную клетку, следующие ходы на ^{а до этого как?} ^{последний?} соседний ход Максима он отвечает симметрично симметричной клеткой

3) Обоснование корректности

1) После первого хода Димы центр занят, тогда любая

клетка Максима не содержит центр (он занят Димой)

2) Симметричная от клетки тоже не содержит центр

3) Симметричные клетки не пересекаются т.к. клетка

из 8 клеток без центра не может быть симметрична сама

себе, иначе 8 клеток разделились бы на пары по симметрии, но центр симметрии - занятая клетка

4) Вся конфигурация поля (кроме ~~занятой~~ первой клетки) - симметрична

Не доказано, что клетка Максима

4) Завершение игры не сможет занять две центрально симметричные клетки

Пока Максим может сделать ход, Дима может ответить симметрично. Когда Максим не сможет найти место для клетки, он проигрывает

Ответ Дима выиграет независимо от игры соперника

Задача 3

Бланк ответов

Где может быть центр креста - он же может быть на
крае доски. Возможными центрами точки (i, j) , где $2 \leq i, j \leq 4$

Это сетка $6 \times 6 = 36$ возможных позиций для центра

Условие блокировки креста. Крест $\oplus$ заблокирован если хотя бы
одна из его пяти (5) клеток уже занята. Выразим
крест с центром (x, y) блокирует все кресты центры которых
находятся в той же строке на расстоянии ≤ 2 и той же столбце ≤ 2

Рассмотрим 4 угла сетки центров $(2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)$

Каждый угол покрывается крестом из небольшой $\angle$ -образной
области рядом с ним. Эти области попарно не пересекаются
значит, нужно минимум 4 креста для блокировки углов, но
и крест в центре ~~достаточно~~ освещает непокрытую угловую
область $4 \times 4 = 16$ клеток, для которых нужны кресты

Разместим кресты с центрами в позиции x (всех координатах
доски x, y) $(2, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 2), (6, 4), (4, 6)$. Эта конфигурация крестов
покрывает все 36 возможных ^{позиций} центров, т.к. каждая строка
сетки 6×6 содержит крест, покрывающий ^{горизонтальный} отрезок 5 клеток.
Верх точки крестов ^{закрывают} оставшиеся

Проверим, что 5 недостаточно

Каждый крест покрывает максимум 9 позиций ~~в~~ из 30
краевых клеток и следовательно расположенных углов, 5 крестов

не могут покрыть все 36 пунктов $\Rightarrow$
 всегда остается одна непокрытая ячейка
 $\Rightarrow$ минимум 6 клеток

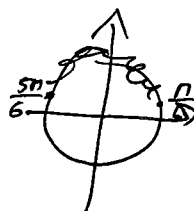
Ответ 6 — можно меньше

Задача 4 Введем систему координат, центр вписанной окружности $(0,0)$, пусть $r=1$

для равнобедренного Δ со стороной $2\sqrt{3}$

$$A(0,2) \quad B(-\sqrt{3},-1) \quad C(\sqrt{3},-1)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad F(0,-1)$$



$$P(\cos \theta, \sin \theta) \text{ где } \theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Угол наклона L_1 и u $BS = CT$

Пусть L_1 имеет угол наклона κ

Условие $BS = CT$ (симметрия S и T относ. центра BC)

$$2\kappa = \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{откуда } \kappa = \frac{\pi}{2}$$

вычисления не привели к результату

После вычисления пересечения прямых со сторонами Δ

$$MK = 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$LN = 4 \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\text{Сумма } MK + LN = 4 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$\left[\frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right]$ по формуле тригонометрии

$$ST = \frac{(1 + \sin \theta)}{\sin 2\kappa} = \frac{2(1 + \sin \theta)}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow MK + LN = ST \Rightarrow ST = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$4 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Ответ: Даoudano

Задача 5 Перепишем уравнение как квадратное уравнение относительно k

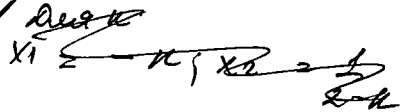
$$xk^2 + (x-1)^2 k - x(2x-1) = 0$$

$$D = (x-1)^4 + 4x^2 = (x^2 + 2x - 1)^2$$

Отсюда получаем

$$k = -x \text{ или } k = 2 - \frac{1}{x}$$

Линия отреза



Бланк ответов

Для k

$$x_1 = -k, x_2 = \frac{1}{2-k}$$

Один корень в A , другой в B - оба корня положительны $\Rightarrow k < 0$

Случай

$$-k \in B \text{ и } \frac{1}{2-k} \in A$$

$$-k \in B = (1, 2) \cup (3, 4) \cup (5, 6) \Leftrightarrow k \in (-2, -1) \cup (-4, -3) \cup (-6, -5)$$

Проверим $\frac{1}{2-k} \in A$

k	$2-k$	$\frac{1}{2-k}$	интервал
$(-2, -1)$	$(3, 4)$		
$(-4, -3)$	$(5, 6)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$	$\subset (0, 1) \oplus$
$(-6, -5)$	$(7, 8)$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{5})$	$\subset (0, 1) \oplus$
		$(\frac{1}{8}, \frac{1}{7})$	$\subset (0, 1) \oplus$

Обратный случай проверка

$$-k \in A \text{ и } \frac{1}{2-k} \in B,$$

$$k \in (-1, 0) \cup (-3, -2) \cup (-5, -4), \text{ когда } \frac{1}{2-k} < 1, \text{ что не попадает в } B$$

В

$$\text{Ответ } k \in (-6, -5) \cup (-4, -3) \cup (-2, -1) \quad +$$

