



2026337029316

Титульный лист

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия

А Н Д Р О С О В

Имя

А Л Е К С А Н Д Р

Отчество

А Л Е К С А Н Д Р О В И Ч

Дата рождения

29 09 2008

Город участия

Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория

М Т - 4 0 8

Дата

02 02 2026

Подпись

Андросов

Пример

заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
 Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



2026337029316

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	—	20	—	20					
Балл члена жюри №2	0	—	20	—	20					

Итоговый балл 50

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

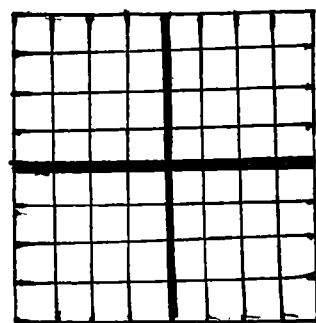
1

2

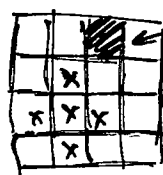
3

4

Разобьем доску на 4 квадрата 4×4 , как показано на рисунке. Рассмотрим один такой квадрат



- 1) Если в него влезает только одна клетка креста, то очевидно она занимает только одну строку, ~~или~~ или вертикаль, в остальных 3х может располагаться еще один крест

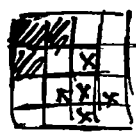
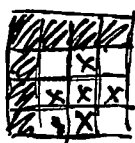


закртая клетка

здесь находится еще один крест

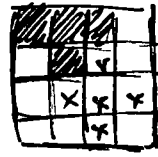
Даже если несколько будут закрыты (т.к. две линии прикинь) мы всё равно сможем поставить крест

- 2) Если в него влезает угловой крест



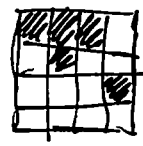
это ситуация предыдущего пункта, т.е. все равно можно поставить крест, т.к. максимум закроет две линии единичками

- 3) Если в него заходят почти весь крест (без клетки)



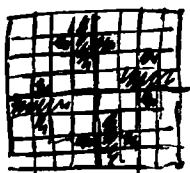
В этом случае мы тоже сможем поставить крест

Мы не сможем поставить новый крест только в ситуации, когда на этот квадрат заходят еще один крест



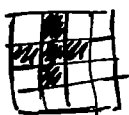
Но заметим, что в этой ситуации (это очевидно левый нижний квадрат, для остальных рассуждений аналогично) в верхний квадрат влезает только одна клетка $\Rightarrow$ в него должен еще помещаться крест ¹ сформированный клетками. Но тогда в верхний

правый квадрат выезжает только одна клетка $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ должны использоваться ещё один крест четвёртой
 клетками $\Rightarrow$ в правый квадрат заходит только $\leq$
 5 ~~клеток~~ (от ~~первого~~ первого и от соседнего) Пример
 расстановки.



Т.е. на данном этапе мы получили оценку
 чтобы закрыть квадрат в него должно влезать хотя бы
 5 клетки одного креста
 если ни в один квадрат не влезает крест целиком,
 то понадобится хотя бы 4 креста

4) Рассмотрим когда в квадраты могут помещаться
 кресты целиком Пусть в одном квадрате целый крест
 есть тогда в него мы не сможем уже поместить новый
 крест:



Тогда необходимо закрыть 3 других

крестов Это можно сделать только, целыми крестами,
 но очевидно, что тогда понадобится снова 4 креста

Рассмотрим ситуацию когда какой-то другой крест
 мы закрыли частично Из ~~этого~~ рассуждений ранее
 понадобится как минимум 4 клетки одного креста и
 1 клетка другого Но тогда эти кресты в свободные
 попадают в каждый максимум 1 и 4 клетками, т.е.

Остается 2 креста, где мы максимум закрыли один,
 тогда ≥ 1 крест понадобится еще на один чтобы
 снова 4 креста

Подытожим

Квадрат можно закрыть только если на него поместится
 ≥ 4 клетки одного креста

Если не ~~один~~ один крест не заходит в квадрат

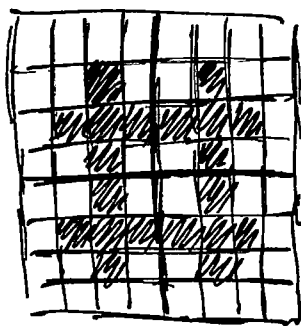
Бланк ответов

целым, то покажется ≥ 4 креста

- Если есть кресты, которые полностью помещены в один квадрат, то покажется ≥ 4 креста

Условие оценки ≥ 4 креста

Пример



Пример +
Оценка +

Ответ 4

N_1

т.к. $f(ab) = a$ или b то если a, b, c - взаимно простые, то $f(ab) \cdot f(bc) \cdot f(ca) = abc$ не доказано
только в том случае, если $f(ab) + f(bc) + f(ca) = abc$ может получиться

т.к. в произведении участвуют только цифры
Цель показать для других случаев, их можно рассмотреть отдельно

Давайте рассмотрим сумму без знаменской функции, где аргументом являются 11, 22, 33, ..., 99 тогда в каждой функции аргументом будет число ab , где $a \neq b$

Разобьем все цифры 1 2 3 4 5 6 7 8 9 на тройки Например (1,5,6), (8,7,2) и (8,4,3) Первые две содержат взаимно простые цифры Во второй это не так, но если мы обозначим их в каком-то порядке за a, b, c , то $f(ab) \cdot f(bc) \cdot f(ca) = abc = 843 = 323$
Может 3 мы могли получить только от 3, а 32 только умножением 84, т.к. $44=16$, $88=64 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(ab) + f(bc) + f(ca) = a+bc = 8+4+3 = 15$$

где любые тройки из этих цифр.

В каждой тройке способов выбрать a, b, c равно $3! = 6$
 При этом $a \neq b \neq c$, т.е. в каждом случае аргументами
 будут различные числа. Рассмотрим сумму всех
 поделок каждой тройки. Пусть тройки a, b, c мы
 их должны пересчитать

$$\begin{aligned} & (f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca})) + (f(\overline{ac}) + f(\overline{cb}) + f(\overline{ba})) + \\ & + (f(\overline{ba}) + f(\overline{ac}) + f(\overline{cb})) + (f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) + f(\overline{ab})) + \\ & + (f(\overline{cb}) + f(\overline{ba}) + f(\overline{ac})) + (f(\overline{ca}) + f(\overline{ab}) + f(\overline{bc})) = \\ & = 3(f(\overline{ab}) + f(\overline{bc}) + f(\overline{ca}) + f(\overline{ac}) + f(\overline{cb}) + f(\overline{ba})) = S' \end{aligned}$$

Таким образом сложив все перестановки мы
 получили утроенную сумму ~~в~~ функций от всех
 возможных чисел перестановки этих цифр

При этом сумма будет равна $6(a+bc) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3S' = 6(a+bc) \Rightarrow \cancel{3S'} S' = 2(a+bc)$$

Получается, если мы рассматриваем 3 уникаль-
 ные тройки подряд, то мы получаем сумму от
 18 уникальных функций из некоторой последовательности.
 Эта сумма будет равна утроенной сумме всех цифр
 $2(1+2+3+4) = 30$

т.к. всего в исходной сумме $99 = 81$ ~~различных~~
 элементов, а мы рассматриваем $81 - 9 = 72$, то нам
 достаточно привести пример их разбиения цифр
 на тройки, удовлетворяющих нашим рассуждениям,
 т.к. $18 \cdot 4 = 72$. Одну тройку уже привели, осталось 3

Если мы это сделаем, то четворная сумма
равна $490 + (f(1) + f(2) + \dots + f(9)) = 490 + (1+2+3+\dots+9) =$
 $= 490 + 45 = ~~360~~ 360 + 45 = \underline{405}$

Приведем примеры ещё трёх троек

①	②	③	④
(1, 5, 6)	(1, 2, 3)	(1, 4, 9)	(1, 7, 8)
(9, 7, 2)	(4, 5, 7)	(5, 2, 8)	(5, 3, 9)
(8, 4, 3)	(8, 9, 6)	(3, 6, 7)	(5, 4, 6)

Можно легко убедиться,
что каждая цифра в че-
тырёх четверках с каждо-
й группой ровно 1 раз,

т.е. такими тройками мы действительно закроем
все числа без повторов

Убедиться, что в каждой тройке сумма функций
будет равна сумме цифр достаточно легко перебором
(как было показано выше). Много троек взаимноперпендикулярных, кроме: (8, 4, 3), (8, 6, 9), (5, 2, 8), (3, 6, 7), (5, 3, 9), (5, 4, 6)

Для первой рассуждения во второй должно получиться
 $2^4 3^3$, что возможно только в одном случае, в
третей $5 2^4$, 2^4 только 28 в четвертой $2^3 7$,
обязательно 6 и 7, а 3, 7 и 2 в 1 степени
в пятой $3^3 5$, очевидно в шестой $2^3 3 5$, т.к.
5 точно используется, то $6=2 \cdot 3$ мы превысим 3 и
не доберем 2

Получается мы подобрали правильные тройки,
откуда следует, что сумма 405

Ответ 405 +

NS

$$A = (0, 1) \cup (2, 3), (4, 5)$$

$$B = (1, 2) \cup (3, 4) \cup (8, 6)$$

$$(k-2)x^2 + (k-1)^2x + k = 0$$

$$\begin{aligned} D &= (k-1)^4 - 4k(k-2) = (k^2 - 2k + 1)^2 - 4(k^2 - 2k) = \\ &= k^4 + 4k^2 + 1 - 4k^3 + 2k^2 - 4k - 4k^2 + 8k = \\ &= k^4 - 4k^3 + 2k^2 + 4k + 1 = (k^2 - 2k - 1)^2 \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{(k-1)^2 \pm (k^2 - 2k - 1)}{2(k-2)} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k^2 - 2k + 1 + k^2 - 2k - 1}{2(k-2)} \\ x = -\frac{k^2 - 2k + 1 - k^2 + 2k + 1}{2(k-2)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{k^2 - 2k}{k-2} \\ x = -\frac{1}{k-2} \end{cases} \quad \text{Рассмотрим } k \neq 2$$

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x = -k \\ x = -\frac{1}{k-2} \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x = -k \\ x = -\frac{1}{k-2} \end{cases} \end{aligned}$$

Обязательно что $k \geq 0$ не получается из
тогда рассматриваем $k \geq 0$.

~~Анализ корней~~

При $k \leq 0$, $k-2 < -2 \Rightarrow x_2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ второй корень может принадлежать только $A \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ первый принадлежит B

т.к. при увеличении k второй корень стремится
к нулю, но не достигает его, то он при всех $k \leq 0$
принадлежит A

Тогда под первый корень из $k \in (-6, -5) \cup (-4, -3) \cup (-2, -1)$
Остаток рассмотреть $k = 2$.

$$(2-2)x^2 + (2-1)^2x + 2 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ — один корень не входит}$$

Ответ: $k \in (-6, -5) \cup (-4, -3) \cup (-2, -1) \neq$