



2026743069235

Титульный лист

Направление

- ☐ анализ данных ☐ информатика ☐ история
☒ математика ☐ обществознание ☐ русский язык
☐ физика ☐ химия

Класс

- ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10 ☒ 11

Фамилия

КУЛИКОВА

Имя

ЯРОСЛАВА

Отчество

ВЯЧЕСЛАВОВНА

Дата рождения

15 11 2007

Город участия

ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория

М422

Дата

02 02 2026

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



2026743069235

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление

☐ анализ данных	☐ информатика	☐ история
☒ математика	☐ обществознание	☐ русский язык
☐ физика	☐ химия	

Класс

☐ 8	☐ 9	☐ 10	☒ 11
----------------------------	----------------------------	-----------------------------	--

Город участия

Е	К	А	Т	Е	Р	И	Н	Б	У	Р	Г								
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--

Заполняется организаторами

Количество доп. листов ☐☐ **Количество черновиков к проверке** ☐☐

Время выхода с ☐☐ ☐☐ **до** ☐☐ ☐☐

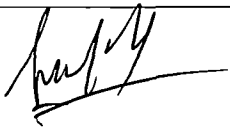
Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	20	—	10	0	—					
Балл члена жюри №2	20	—	0	0	—					

Итоговый балл

Подпись члена жюри №1



Подпись члена жюри №2



Пример заполнения

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

ЗАДАНИЕ 1

Рассмотрим, какой цифре ~~будет~~ равняться функция $f(\overline{ab})$ для каждого a, b , (если выполн, что $f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc$ для всех a, b, c) — первой или второй цифре

Если $a = b$, то неважно, какой из цифр равна функция, т.к. обе цифры одинаковые

Поэтому рассмотрим числа, где $a \neq b$

~~Утверждение~~ Докажем, что для всех таких чисел функция работает по одинаковому правилу — либо она у всех равна 1-й цифре, либо у всех второй

Рассм. $f(\overline{ab}) = a, a \neq b$ Ф-я равна 1-й цифре

Рассм. $f(\overline{cd}) = d, c \neq d$ Ф-я равна 2-й цифре

Докажем, что эти ~~два случая~~ два случая не могут одновременно выполняться

Рассм произведение ф-й $f(\overline{ab}) f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = abc$ (1)
и произв-е функц $f(\overline{cd}) f(\overline{db}) f(\overline{bc}) = bcd$ (2)

$$(1) f(\overline{ab}) = a \Rightarrow \text{поделит обе части на } a \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = bc$$

$$(2) f(\overline{cd}) = d \Rightarrow \text{поделит на } d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\overline{bc}) f(\overline{db}) = bc$$

$$\text{Отсюда } f(\overline{bc}) f(\overline{ca}) = f(\overline{bc}) f(\overline{db}) \quad f(\overline{bc}) \neq 0 \Rightarrow \text{поделит } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\overline{ca}) = f(\overline{db})$$

Значит, либо $c = d$ (невозможно по предположению),

либо $a = b$ (тоже невозможно), либо $c = b$, либо $a = d$

Теперь рассм. ~~Другие~~ произв-е

$$(1) f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{bd}) \cdot f(\overline{da}) = abd$$

$$\text{поделит на } a \quad f(\overline{bd}) \cdot f(\overline{da}) = bd$$



Задача 1 (продолжение)

$$(2) f(\overline{aa}) f(\overline{da}) f(\overline{ac}) = c \cdot a$$

поделит на d

$$f(\overline{da}) \cdot f(\overline{ac}) = c \cdot a$$

Задача 1

Заметим, что если число имеет вид $\overline{aa}$, то функция может равняться только a , и наоборот, первая это или вторая цифра, т.к. они одинаковы.

Поэтому рассмотрим числа 11, 22 - 99 отдельно и для них

$$f(11) + f(22) + \dots + f(99) = 1 + 2 + \dots + 9$$

Теперь рассмотрим числа вида $\overline{ab}$, где $a \neq b$

Разобьем все ^{такие} числа 12, 13, 19, 21, 23, 97, 98 на пары $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$. В каждой паре встречаются все возможные числа, которые двузначны и которые можно составить из цифр 1-9, такая пара для $\overline{ab}$ найдется.

Докажем, что сумма $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba})$ равно по одному разу встретятся a и b .

Или либо $f(\overline{ab}) = a$ и $f(\overline{ba}) = b$, либо $f(\overline{ab}) = b$ и $f(\overline{ba}) = a$.

От противного

$$\text{Б.О.О. пусть } f(\overline{ab}) = f(\overline{ba}) = a$$

$$\text{Рассм. произв. } f(\overline{ab}) \cdot f(\overline{ba}) \cdot f(\overline{aa})$$

$$\text{по усу это должно быть равно } a \cdot b \cdot a = a^2 \cdot b$$

$$\text{П.к. } a = f(\overline{ab}) = f(\overline{ba}), \text{ поделит на } a^2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{получим, что } f(\overline{aa}) = b \text{ но это невозможно, т.к. } a \neq b \text{ и}$$

значит, для пары $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ в сумме ^{функции} один раз встретятся a и один раз b .

Таким образом, для любых двух разных a и b $f(\overline{ab}) + f(\overline{ba}) = a + b$

Тогда общ. сумма равна

$$f(11) + f(99) + (f(12) + f(21)) + (f(13) + f(31)) + \dots + (f(23) + f(32)) +$$

$$+ (f(89) + f(98)) = (1 + 9) + (1 + 2) + (1 + 3) + \dots + (1 + 9) + (2 + 3) + (2 + 9) +$$

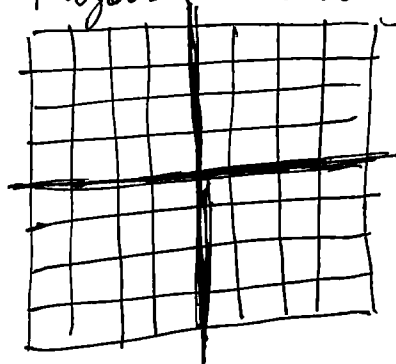
$$+ (8 + 9) = 45 + (8 \cdot 1) + 8 \cdot 2 + \dots + 8 \cdot 9 = 45 + 8 \cdot 45 = 9 \cdot 45 = 405$$

(8, т.к. каждый складывается
встр. в паре со всеми числами от 1 до 9,
кроме его самого)

Ответ: 405

Задача 3

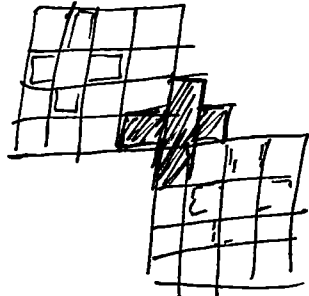
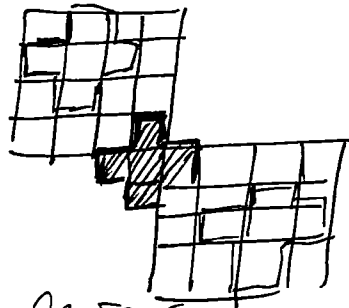
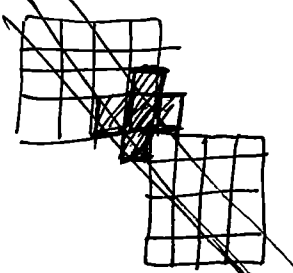
Разобьем всю доску 8×8 на четыре больших квадрата 4×4



Докажем, что нельзя использовать меньше 4-х крестов, чтобы все их покрыть (квадрат считается покрываемым, если из него нельзя вырезать еще крест из 5 клеток)

Заметим, что как бы мы ни располагали пятиклеточный крест, он не сможет одновременно покрывать два квадрата 4×4

1) Если эти квадраты не соседние



Чтобы в каждом квадрате была покрыта хотя бы одна клетка, крест должен располагаться следующим образом. Квадраты соприкасаются по углу, а значит, покрывая обе клетки разом (клетку квадрата 1 и квадрата 2) крест может только теми клетками, которые тоже соседние по углу (по диагонали). Два способа это сделать изображены на схеме. Как можно заметить, ни в одном из случаев один крест не покрывает никаких квадратов полностью — из них все еще можно вырезать крест из 5 клеток. Значит, ^{в этом случае} крест не сможет покрывать больше одного квадрата сразу.

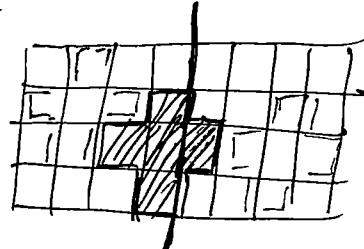
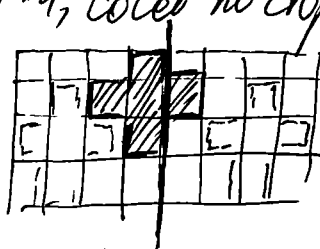
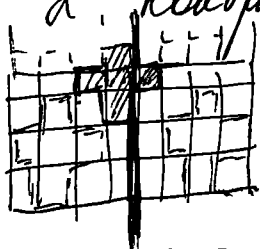
а если не покрыта ни одна, то из квадр 4×4 точно можно вырезать новый крест



Пример +

Задача 3 (продолжение)

2. Квадраты 4×4 , сосед по стороне



(остальные случаи расположения креста и двух квадратов являются зеркальным отражением или поворотом этих случаев, поэтому рассм. аналогично).

~~Чтобы крест покрывал хотя бы одну клетку в каждом квадрате, он должен покрывать какие-либо две из его соседних~~

неверно!

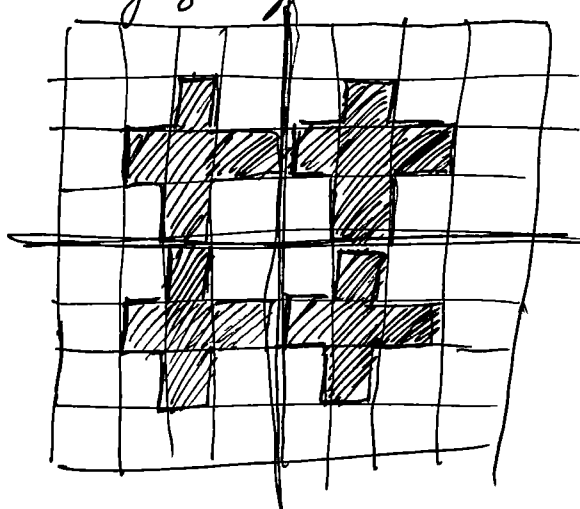
не рассмотрен случай, когда в одном квадрате сразу два креста

Крест должен покрывать хотя бы одну клетку в каждом квадрате (т.к. иначе из квадрата 4×4 точно можно вырезать крест)

Все возможные случаи так расположить кресты (как на схеме, если его сдвинуть еще влево или еще вправо, то крест не будет покрывать ни одной клетки в левом квадрате, если сдвинуть еще вверх или вправо, то получаются уже рассмотренные случаи и их зеркальные отражения)

Заметим, что во всех этих случаях крест не покрывает сразу 2 квадрата

Таким образом, из каждого из четырех квадратов придется вырезать хотя бы один крест. Пример с 4 крестами существует

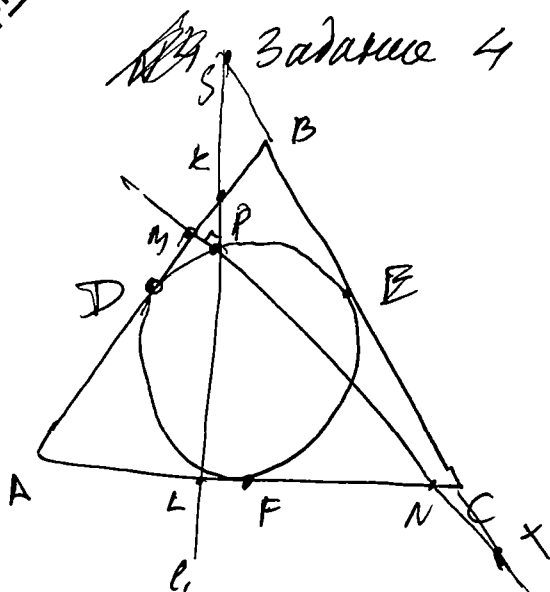


Здесь из ~~каждого~~ оставшихся клеток квадрата нельзя вырезать крест — нет ~~всех~~ клеток, у которых все 4 соседа существуют и свободны

Оценка +

Ответ 4

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$ - равносторон

(DEF) - впис

$PE \perp DE$

$l_1 \perp l_2$, $l_1 \cap AB = K$, $l_1 \cap AC = L$,

$l_1 \cap BC = S$

$l_2 \cap AB = M$, $l_2 \cap AC = N$, $l_2 \cap BC = T$

$BS = CT$

Доказать $MK + LN = ST$

(1) $\triangle STP$

$\angle SPT = 90^\circ$ (т.к. $l_1 \perp l_2$),

$BS = CT$ по уcu, $BE = EC$ (~~т.к.~~ AE - медиана, бис-са и высота, т.к. ABC равностор, и E - т. кас. впис. окр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow SE = BS + BE = CT + EC = ET \Rightarrow PE$ - медиана

в $\triangle STP$

т.к. $\angle SPT = 90^\circ$, то $PE = \frac{1}{2} ST = SE = ET$

(2) по т. Пифагора в $\triangle PKM$

$$MK^2 = PK^2 + PM^2 \Rightarrow MN = \sqrt{PK^2 + PM^2}$$

по т. Пифагора в $\triangle PLN$

$$LN^2 = PN^2 + PL^2 \Rightarrow LN = \sqrt{PN^2 + PL^2}$$

по т. Пифагора в $\triangle STP$

$$ST^2 = SP^2 + PT^2 \Rightarrow ST = \sqrt{SP^2 + PT^2}$$

