



333395506821

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и
☐ Экономика и управление гуманитарные науки
Курс ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует
Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке : 7
Время выхода с до :

Протокол проверки

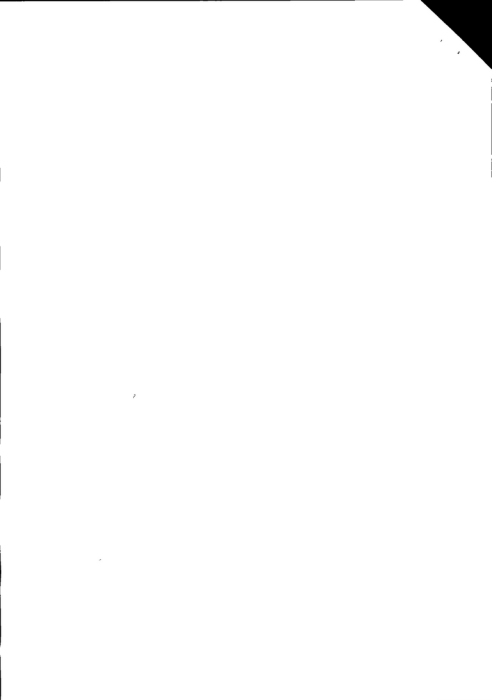
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	25	75								
Балл члена жюри №2	25	75								
Номер задания	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Балл члена жюри №1										
Балл члена жюри №2										

Итоговый балл 100

Подпись члена жюри №1 [подпись] Подпись члена жюри №2 [подпись]

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



$V = \mathbb{Z}^4, U = \{x | x \in \mathbb{Z}^4, x \geq 0\}$ (по укл.)

1. $\vec{a}_1 = (1; 0; 0; 0); \vec{a}_2 = (0; 1; 0; 0); \vec{a}_3 = (0; 0; 1; 0); \vec{a}_4 = (0; 0; 0; 1)$

— исконое. До-во: Пусть $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3; u_4) \in U \Rightarrow u_i \in \mathbb{Z} \wedge u_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,4}$. Тогда $\vec{u} = (u_1; 0; 0; 0) + (0; u_2; 0; 0) + \dots + (0; 0; 0; u_4) = u_1 \cdot (1; 0; 0; 0) + \dots + u_4 \cdot (0; 0; 0; 1) = u_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + u_4 \cdot \vec{a}_4$.

~~Далее~~ Пусть $\exists p_1, p_2, p_3, p_4: p_i \in \mathbb{Z} \wedge p_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,4}$, и

$\vec{u} = p_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + p_4 \cdot \vec{a}_4$. Но тогда $\vec{u} = (p_1; p_2; p_3; p_4) = (u_1; u_2; u_3; u_4)$,

т.е. $p_i = u_i, \forall i \in \overline{1,4}$. Докажем и обратное: пусть $\vec{u}$ — лев.

или прав. чл. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ с некоторыми коэф. ~~матрицы~~ $\oplus$

2. Пусть $\vec{a}_1 = (1; -1; 0; 0); \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ — те же, что в пункте

"1.". $\vec{p}_1 = (1; 0; 0; 0)$. Пусть $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3; u_4) \in U$

опн-но обратн. л. как ~~доказано~~ $\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 + u_4 \vec{a}_4$, а это равно $(u_1; 0; 0; 0) +$

$+ u_2 \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 + u_4 \vec{a}_4 = (u_1; -u_1; 0; 0) + (0; u_1; 0; 0) + u_2 \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 + u_4 \vec{a}_4 =$

$= u_1 \vec{a}_1 + (u_1 + u_2) \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 + u_4 \vec{a}_4$. Так как $u_i \in \mathbb{Z} \wedge u_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,4}$,

то $u_1 + u_2 \in \mathbb{Z} \wedge (u_1 + u_2) \geq 0$. Тогда, $\exists p_1, p_2, p_3, p_4: p_i \in \mathbb{Z} \wedge p_i \geq 0$,

$\forall i \in \overline{1,4}$ и $\vec{u} = p_1 \vec{a}_1 + \dots + p_4 \vec{a}_4$. Но тогда $\vec{u} = (p_1; p_2; p_3; p_4) = (u_1; u_2; u_3; u_4)$

$\Rightarrow u_i = p_i, \forall i \in \overline{1,4}$; $p_1 = u_1 + u_2 \Rightarrow$ обратн.е ~~доказано~~

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ и $\vec{a}_4$ — исконые. $\oplus$ (т.е. доказано)

3. Докажем от противного: пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ — левые

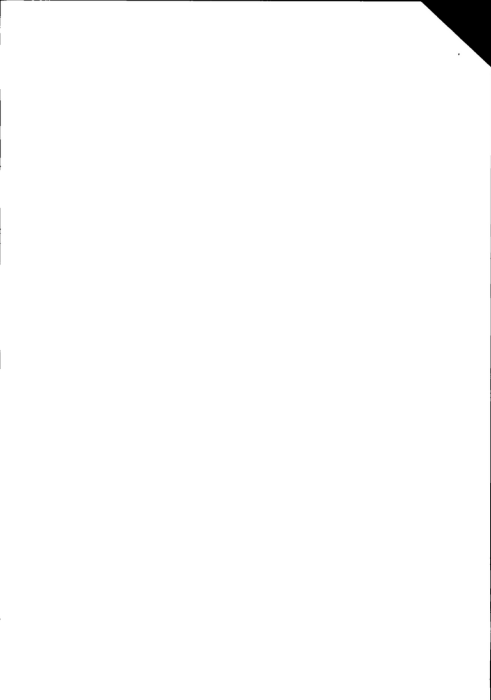
члены. Пусть $\vec{u} = (1; 0; 0; 0) \in V$ имеет обратн.е

$\vec{v} = u_1 \vec{a}_1 + \dots + u_4 \vec{a}_4$, где $u_i \in \mathbb{Z} \wedge u_i \geq 0, \forall i \in \overline{1,4}$. Тогда $2\vec{u} = (2; 0; 0; 0) =$

$= (u_1 \vec{a}_1 + \dots + u_4 \vec{a}_4) + (u_1 \vec{a}_1 + \dots + u_4 \vec{a}_4)$, т.е. $\vec{u}$ — лев. чл. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ с коэф. $u_i \geq 0$.

представление: $-1 \cdot \vec{u} = p_1 \vec{a}_1 + \dots + p_n \vec{a}_n$, где $p_i \in \mathbb{Z}, p_i \geq 0, \forall i \in \overline{1, n}$.
 Но тогда $\vec{u} = 2\vec{u} + (-1)\vec{u} = (2p_1 + p_1)\vec{a}_1 + \dots + (2p_n + p_n)\vec{a}_n$. Так
 представим $\vec{u}$ представим, получим, что $u_i = 2p_i + p_i, \forall i \in \overline{1, n} \Rightarrow$
 $\Rightarrow u_i = 3p_i, \forall i \in \overline{1, n}$. Так как $u_i = 0, \forall i \in \overline{1, n}$, то $u_i = p_i = 0, \forall i \in \overline{1, n}$
 $\Rightarrow \vec{u} = 0\vec{a}_1 + \dots + 0\vec{a}_n = (0, 0, \dots, 0)$, что противоречит его определению.
 Значит, представим строго больше, и тогда $a_1, \dots, a_n$ не сводят.
 4. ~~Рассуждая~~ $\oplus$ (по таблице) $(1011; 1011; 1011; 1011) = \vec{b}$. Получилось
 у нас есть представление $\vec{b} = b_1 \vec{a}_1 + \dots + b_n \vec{a}_n$, причем $b_i \in \mathbb{Z}, b_i \geq 0, \forall i \in \overline{1, n}$.
 Тогда $(2022; 2022; 2022; 2022) = 2\vec{b} = (2b_1; 2b_2 + \dots + (2b_n) \vec{a}_n$.
 Представим $\vec{b}$ ~~представим~~ $b_i \in \mathbb{Z}, b_i \geq 0, \forall i \in \overline{1, n} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2b_i) \in \mathbb{Z}, (2b_i) \geq 0, \forall i \in \overline{1, n}$, причем $2b_i \geq 2, \forall i \in \overline{1, n}$.
 Значит ~~представим~~ $\vec{b}$ много представим $\vec{b}$ в виде
 $2b_1 \vec{a}_1 + \dots + 2b_n \vec{a}_n$ с функцией, которую можно считать
 четностью, а в функции представим все коэффициенты четные.
 Ответ: Нет. $\oplus$ (по таблице)

2.: ~~интерпретация~~ чертёж



Нам дано: Базис 2. Система ~~линейных~~
 векторов $\vec{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 1, -1)$,
 $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, $m = 4$ и $n = 4$. ~~Д-во. Система~~
~~линейно независима~~. $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in U$:
 ~~$\vec{u} = u_1 \vec{a}_1 + u_2 \vec{a}_2 + u_3 \vec{a}_3 + u_4 \vec{a}_4$~~
 $\vec{u} = (u_1, u_1 + u_2, u_3, u_3 + u_4) = (u_1, u_2, u_3, u_4) = \vec{u}$
 Таким образом: $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : u_i \in \mathbb{Z}$ и $u_i \geq 0 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^4$
 $\delta p_i \geq 0$ и $\vec{u} = p_1 \vec{a}_1 + \dots + p_n \vec{a}_n$. Но тогда $\vec{u} = (p_1, p_1 + p_2, p_3, p_3 + p_4)$
 $= (u_1, u_2, u_3, u_4) \Rightarrow u_1 = p_1$ и $u_3 = p_3 \Rightarrow p_2 = u_2 - p_1 = u_2 + u_1$ и
 $p_4 = u_4 + p_3 = u_4 + u_3$. Итого: $\vec{u} = p_1 \vec{a}_1 + p_2 \vec{a}_2 + p_3 \vec{a}_3 + p_4 \vec{a}_4$
 Определим a_1, a_2, a_3, a_4 с помощью (a_1, a_2) и (a_3, a_4)
 с помощью линейных комбинаций.

$$\begin{aligned}
 abc &\leq 29160 & 9+2+5+12+9 &= 35,4 \\
 9b+20c &\leq 810 & \frac{1}{9} b(t-20c) &c^2 = \frac{1}{9} t(t-20c) \frac{t^2}{20} - \frac{1}{9} t \frac{t^2}{20} \\
 ab^2c^3 &\sim 1000 & 180 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 ab^2c^3 &= (abc) \cdot bc^2 & 81/18 &= 9/2 \\
 ab^2c^3 &\leq 29160 bc^2 & \frac{9b+20c}{30} &= C \Rightarrow 9b=10C \\
 9b+20c &\leq 810 & 30C &= 810 \Rightarrow C=27 \\
 abc+20ac &= 810ac & 810 &= 9 \cdot 9 \cdot 10 \\
 abc &\leq 29160 & 2916/3 &= 972 \\
 t=9b & \Rightarrow 9b+20c \leq 810 & 972 &= 2 \cdot 2 \cdot 3^5 \\
 ab^2c^3 &= t b c^2 = t \frac{t-20c}{9} c^2 = \frac{1}{9} t^2 c^2 - \frac{20}{9} t c^3 & a &= \frac{29160}{27 \cdot 3} = \frac{972}{3} = 324 \\
 \frac{1}{9} (4t^2 - 20tc^2)'_c &= \frac{1}{9} (2tc - 20tc^2) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{10} t & 2022 &= 2 \cdot 1011 = 2 \cdot 3 \cdot 337 \\
 V = \mathbb{Z}^4, W_0 &= \mathbb{Z}_4 U_0; U = W_0 & 972 &= 9 \cdot 108 = 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2^2 \\
 & & 810 &= 3^4 \cdot 2 \cdot 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 29160 \\
 \times 4 \\
 \hline
 116640
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 270 \\
 \times 30 \\
 \hline
 8100
 \end{array}$$

OK