ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101568085628

Титульный лист

Направление

- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Фамилия ГЛИНСКИХ

Имя ГЕОРГИЙ

Отчество АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 12 06 2004

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 201

Телефон 89024439922

Дата 05 02 2024 **Подпись** [signature]

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101568085628

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	04								
Балл члена жюри №2	50	4								

Итоговый балл 54

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2 Филатова.

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариантная часть.

1. Утверждение. Лиса бесконечно много раз откусила от каждого куска.

Доказательство утверждения:

Заметим, что после каждого шага один из кусков становится больше другого (по условию). Следовательно, для всех $n \in N$: $b_n > 0$. Вместе с тем она остановилась через $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ минут. Очевидно (из равенства в предыдущей строке), что было сделано бесконечно много (а именно счетно) шагов лисой. В силу того, что $b_n > 0$, лиса каждый второй раз откусывала от одного и кусочка, меняя их. Из всего вышесказанного следует, что лиса бесконечно много раз откусила от каждого кусочка. $\square$

+8

2. Пусть теперь $b_n = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} > 0$.

Заметим, что процесс деления сыра описывается следующей схемой (~~уход~~ предельный переход в силу того, что лиса делала бесконечно много кусков):

$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{шаг } 1} \begin{pmatrix} 3-b_1 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{шаг } 2} \begin{pmatrix} 3-b_1 \\ 3-b_1-b_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{шаг } 3} \begin{pmatrix} 3-b_1-b_2-b_3 \\ 3-b_1-b_2 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\text{(пред. переход)}} \ldots \to \begin{pmatrix} 3-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ 3-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда лисе досталось сыра $7 - 2\left(3 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Заметим, что $\forall n > 2\ \exists k \in N:\ n = k+2$, следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \ldots = 1\frac{1}{2}.$$ +20

Ответ: лиса съела 4 кг. сыра V

3. Согласно рассуждениям в предыдущем пункте, каждому медвежонку досталось по $3-\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ~~сыра~~ килограмм сыра.
В частности, при $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ каждому медвежонку досталось по $1\frac{1}{2}$ кг. сыра. ✓

<u>Ответ</u>: (в общем виде) каждому досталось по $3-\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ кг. сыра, (при $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ — пред. пункт) — по $1\frac{1}{2}$ кг. сыра.

4. Вновь опираясь на рассуждения ~~предыдущего~~ второго пункта, получаем, что каждому медвежонку досталось по $3-\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ кг. сыра. Вместе с тем число $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ если существует, то единственно, ведь $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$, а пределы числовых последовательностей (и в частности $\{\sum\limits_{n=1}^{k} b_n\}_{k=1}^{\infty}$) если существуют, то единственны. (Иначе противоречие с определением ~~числового~~ предела по Коши. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A_1$, $A_2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$) $\square$

не все члены начиная с некоторого номера лежат здесь.

50

<u>Ответ</u>: нет, невозможно. ~~(при $b_n \geq 0$)~~

~~возможно~~

Вариативная часть. Блок 2.

Для начала ~~заметим, что~~ назовем матрицы, о которых идет речь, „хорошими". Заметим, что хорошую матрицу порядка n можно домножать на „λa", чтобы определитель умножался на a. Стало быть, необходимо попытаться найти такие матрицы, чтобы их определитель был не равен нулю, тогда его можно будет спокойно умножать на „λa". Второе замечание — имеет место цикл

$$\begin{tikzcd}
 & a_{ij} \arrow[dr] & \\
-a_{n+1-i,\,n+1-j} \arrow[ur] & & -a_{n+1-j,\,n+1-i} \arrow[dl] \\
 & a_{ji} \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Бланк ответов

Вследствие условия $a_{ij} = -a_{n+1-j,\, n+1-i}$. Тогда:

При $n=1$ единственно возможная матрица (0), её определитель 0. (при $a\neq 0$: $a \neq -a$ в $\mathbb{R}$) $\checkmark$ +1

При $n=2$ единствен вид матрицы $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$, её определитель также 0. (линейно-зависимые строки) $\checkmark$ +1

При $n=3$ единственный вид матрицы $\begin{pmatrix} a & b & -a \\ -b & 0 & -b \\ -a & b & a \end{pmatrix}$ — в середине 0 как при $n=1$, её определитель: $-\left(b\begin{vmatrix} -b & -b \\ -a & a \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & -a \\ -b & -b \end{vmatrix}\right) = -(b(-ab-ab+(-ab-ab)))$
$= 4ab^2$, домножая на $\sqrt[3]{l} \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$ можно получить любое число из $\mathbb{R}$. $\checkmark$ +2

При $n=4$: матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет определитель $-1\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$

$+\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot 2 = 3\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$

Здесь и далее перестанов двух строк (столбцов), дальше всегда перестанову двух столбцов (строк), следовательно, ~~знак~~ ~~[illegible]~~ знак определителя может измениться лишь после домножения на $\sqrt[n]{l}$, $l \in \mathbb{R}$.

Заметим, что при чётном n: $\sqrt[n]{l} \geq 0$, тогда чётные сохраняют знак.

При $n \geq 4$: представляем матрицу как рамку и то, что в ней:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & -a \\ \vdots & \boxed{} & & -b \\ -b & & & \vdots \\ -a & \dots & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$

$-5 < 0$

в обведённом месте стоит хорошая матрица порядка $n-2$ (т.е. из уже рассмотренных случаев). Плодотворной идеей является положить $a=0$, тогда при $b, c, \ldots \neq 0$ получаем линейную независимость первой и последней строк и остальных. Сами первая и последняя строка также линейно-независимы, и по замечанию, рамка не изменяет знака определителя меньшей матрицы, обведённой в рамку.

Ответ: При $n=1$ определитель принимает значения $\{0\}$

При $n=2$ — $\{0\}$

При $n=2k+1$ — $\mathbb{R}$, $k=1,2,..$

При $n=2k+2$ — $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $k=1,2,\dots$

? неверно

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ здесь множество $\{x\in\mathbb{R} : x\geq 0\}$, во многих этапах решение опирается не теорему о линейной независимости строк/столбцов от невырожденной матрицы.

Доказано при $n=1,2$ и пример при $n=3$

(4 балла)

Бланк ответов