ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101479232919

Титульный лист

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Фамилия КОЛЧАНОВ

Имя НИКИТА

Отчество МАКСИМОВИЧ

Дата рождения 29 01 2002

Город участия ПЕРМЬ

Аудитория 115

Телефон +79194957918

Дата 05 02 2024 **Подпись** Колч

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101479232919

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- ☐ Естественные науки
- ☑ Математика и информатика
- ☐ Экономика и управление
- ☐ Инженерные науки
- ☐ Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☑ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☑ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия П Е Р М Ь

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	50								
Балл члена жюри №2	50	50								

Итоговый балл 100

Подпись члена жюри №1 Филатова

Подпись члена жюри №2 Филатова.

Пример заполнения
А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариативная часть

1) Время затраченное мисой на поедание (уравнивание кусков) в зависимости от кол-ва n мгновенных укусов

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \quad \checkmark$$

~~Да~~ Это убывающая геометрическая прогрессия с $q = \frac{1}{2}$, поэтому:

$$\lim_{n\to\infty} T(n) = 2 \quad \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ b_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \checkmark$$

~~На Посему задача~~

~~Последовательность~~ даже строго возрастает

$T(n)$ не убывает, поэтому для любого конечного n $T(n) < 2$.

Следовательно через две минуты Миса сделает бесконечное кол-во укусов. Что и требовалось доказать.

+8

2) Миса мгновенно откусывает по $b_n = \frac{2}{n\cdot(n+2)}$ кг. сыра на n-ом укусе. $(n = 1, 2, \ldots)$

$$b_n = \frac{2}{n\cdot(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \checkmark$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+2}\right) \cancel{= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

$S(n)$ - масса сыра мгновенно откусанного за n откусываний

Заметим:

$$S(n) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad \text{для } n \geq 2$$

+20

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \checkmark$$ - масса сыра мгновенно откусанно

Бланк ответов

Т. к. Миа после мгновенных отсутствий съедает от ~~второго~~ другого сыра столько же сыра, чтобы их уровнять, то сумарно, после первоначального уравнивания, Миа съедает в два раза больше.
~~Иначе говоря Миа съедает~~
т. е. после первоначального уравнивания Миа съедает: $2 \cdot \left(\lim\limits_{n \to \infty} S(n)\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 = F_1$ V

F_1 - масс сыра съеденного после первоначального уравнивания.
Осталось добавить массу первоначального уравнивания
$F_0 = M_2 - M_3 = 4 - 3 = 1$
Всего Миа съела сыра: V
$F = F_0 + F_1 = 1 + 3 = 4$ кг.
Ответ: Всего Миа съела 4 кг. V

2) После первоначального уравнивания Миа съедает от каждого кусочка массу равную $\lim\limits_{n \to \infty} S(n) = \frac{3}{2} = W$, т. к. Миа каждый раз их уравнивает. (Пусть $m = 3$ - масса после первоначального уравнивания) V
Поэтому каждому медвежонку достанется по $m - W$ сыра, т. е.:
$m - W = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ кг.

Ответ: Каждому медвежонку достанется по 1,5 кг. сыра

50 баллов

4) Нет, не может, т.к. после первоначального уравнивания, кусочки будут массой по 3 кг.
А далее из-за того, что Миа их каждый раз уравнивает, она отъедает от каждого кусочка по $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6$ кг. Сыра, т.е. от каждого кусочка в любом случае будет отъедена одинаковая масса G.
т.е. по итогу масса каждого кусочка будет равна: $m - W$ (где m - масса кусочков после первоначального уравнивания)
Что и требовалось доказать. √

Вариативная часть

Блок 1. Математика

$F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1-x^2} f(x^{2n}\cdot t)\,dt$, где $f(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & u \neq 0 \\ k, & u = 0 \end{cases}$
$x \in [-1;1]$

При $x=0$:

$F(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(0)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 k = k$ +4

Далее $x \neq 0$ и рассматривается интервал $(0;1-x^2)$ (т.к. интеграл по $[0;1-x^2]$ и $(0;1-x^2)$ не отличается)

В этом случае:

$F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1-x^2} f(x^{2n}\cdot t)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1-x^2} \frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}\,dt$

$\sin(x^{2n}\cdot t)$ при фиксированных x и n возрастает не быстрее чем $x^{2n}\cdot t$ (т.к. $x^{2n} \geq x^{2n}\cos(x^{2n}\cdot t)\cdot x^{2n}$).

Поэтому $\frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}$ убывает по t на $(0;+\infty)$

т.е. $\frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t} \leq 1$ на $t \in (0;1)$

$\frac{\sin(x^{2n})}{x^{2n}} \leq \frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}$ на $t \in (0;1)$

Тогда:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2}\frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}\,dt \le \lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2} 1 \le 1-x^{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2}\frac{\sin(x^{2n}\cdot t)}{x^{2n}\cdot t}\,dt \overset{?}{\ge} \lim_{n\to+\infty}\int_0^{1-x^2}\frac{\sin(x^{2n})}{x^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin(x^{2n})}{x^{2n}}\cdot(1-x^2) = 1-x^2$$

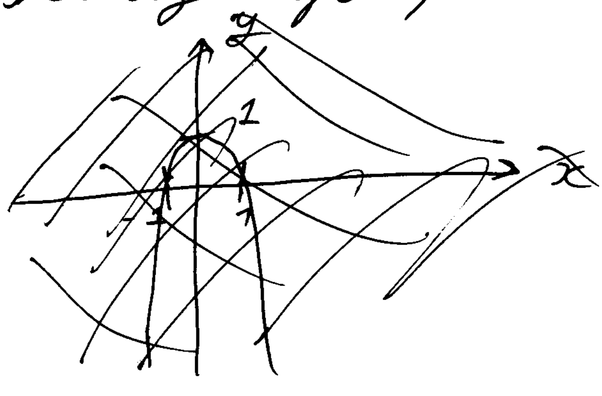
В итоге при $x\ne 0$:

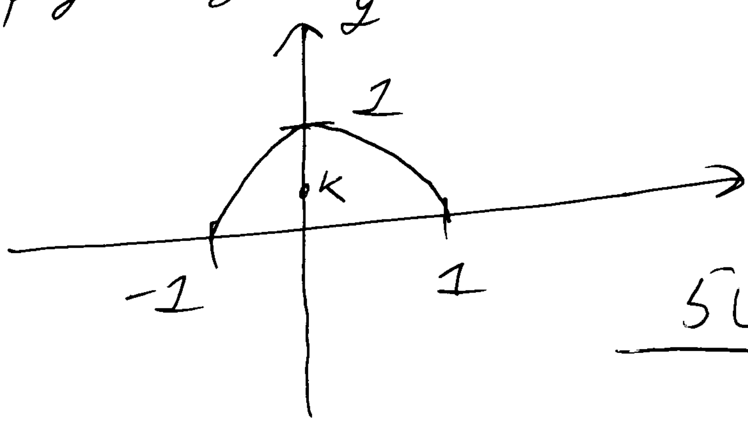
$f(x) = 1-x^2$

Т.е. выражение для функции $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x\ne 0 \\ k, & x=0 \end{cases}, \quad x\in[-1;1]$$

Эскиз графика функции $f(x)$:





50

Из выражения для графика видно, что при $k\ne 1$, функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x=0$. А при $k=1$, выражение для функции $f(x)$ можно записать так

$f(x) = 1-x^2$, это функция очевидно ~~нез~~ непрерывна на отрезке $x\in[-1;1]$