ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101273101292

Титульный лист

Направление	☐ Естественные науки ☒ Математика и информатика ☐ Экономика и управление	☐ Инженерные науки ☐ Социальные и гуманитарные науки
Вариативный блок	☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5	
Курс	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует	

Фамилия ЛИЯСОВ

Имя СЕРГЕЙ

Отчество АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 29 11 2002

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория Ф401

Телефон 89995102911

Дата 05 02 2024 **Подпись**

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД.СТУДЕНТ
ОЛИМПИАДА УРАЛЬСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

3101273101292

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп. листов

Количество черновиков к проверке :

Время выхода с

до :

Протокол проверки
Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	18	23								
Балл члена жюри №2	18	23								

Итоговый балл 41

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2 Филатов

Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

~~ИНВАРИАНТНАЯ ЧАСТЬ~~ 1

~~Пусть $x_0=3$, $x_1=3-b_1$, $x_2=3-b_1-b_2$, ..., $x_n=3-\sum_{i=1}^{n} b_i$~~

1) Лиса ~~откусывает~~ уравнивает куски и сразу делает ещё укус сначала за 1 минуту, затем за $1/2$, затем за $1/4$ и т.д. суммарно тратит 2 минуты, т.е. имеется рав-во: $2=1+1/2+1/4+\ldots+1/2^i+\ldots$ Докажу, что в правой части беск-но слагаемых: перепишем рав-во в двоичной системе счисления: +8 V

$$10_2 = 1_2 + 0{,}1_2 + 0{,}01_2 + \ldots + 0{,}\overset{1}{0}\ldots\overset{i-1}{0}1_2 + \ldots = 1{,}11111\ldots_2 \Rightarrow 10_2 = 1{,}111\ldots_2$$

В правой части столько же единиц, сколько слагаемых в исходном равенстве. Если это к-во конечно, то имеем рав-во вида $10_2=1,\overset{1}{1}\overset{2}{1}\ldots\overset{n}{1}_2$, что не м.б. верным — противоречие; если же к-во бесконечно, то имеем $10_2=1,(1)_2=1+\frac{2}{2}=2=10_2$ — верно. Значит слагаемых беск-но => укусов было беск-но, ЧиТД

2) $1+2\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$ — искомое к-во сыра, дост-ося Лисе, если $b_n=\frac{2}{n(n+2)}$ V

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ СМ (оценка суммы неверная)

сумма ряда не найдена

4) Для любого b_i найдётся такой момент времени, когда Лиса откусит его от одного куска и такой момент, когда откусит от другого (ведь укусов бесконечно; после первого откусывания b_i кг от одного из кусков сразу следует откусывание этих же b_i кг от второго куска для уравнивания). Значит, с момента, когда оба куска были по 3 кг шла беск. послед-ть из пар равных укусов, значит суммарная масса, откусанная от каждого из кусков, одинакова, значит невозможно одному из медвежат больше сыра чем другому оставить, ЧиТД +10

18 баллов

Вариа~~т~~вная часть БЛОК 2

Введём операцию отр-я по вертикали: для $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & \cdot & & b_{2n}\\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix}$ пусть $B^M = \begin{pmatrix} b_{1n} & b_{1,n-1} & \dots & b_{11}\\ b_{2n} & & & b_{21}\\ & \dots & & \vdots \\ b_{nn} & b_{n,n-1} & \dots & b_{n1}\end{pmatrix}$, т.е. $B=A^M :\Leftrightarrow b_{ij}=a_{i,n-j+1}$ (где $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$)

Очевидно, $(B^M)^M = B$; Пусть A - матрица из условия, $B=A^M$, Тогда $b_{ij} = a_{i,n-j+1} = -a_{n+1-(n-j+1),n+1-i} = -a_{j,n+1-i} = -b_{ji} \Rightarrow$

$\Rightarrow B=-B^T \Rightarrow |B|=|-B^T| = |-B| \Rightarrow |A^M| = |-A^M|$

~~по условию. По формуле определителя:~~

~~$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}|$; С другой стороны, если разл. по последнему столбцу то~~

~~$|A| = (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}| - (-1)^{n+1} a_{2n}|A_{2n}|$~~

вынесем в $|-B|$ множитель -1 из каждой строчки, получим $(-1)^n|B| \Rightarrow$

$\Rightarrow |B| = (-1)^n|B| \Rightarrow |A^M| = (-1)^n|A^M|$

Рассмотрим связь м/у $|C^M|$ и $|C|$, $\forall C$ - матрица порядка n

~~$|C^M| = c_{1n}|C^M_{1n}| - c_{1,n-1}|C^M_{1,n-1}| + c_{1,n-2}|C^M_{1,n-2}| \dots + (-1)^{n+1}c_{11}|C^M_{1,1}|$~~

C_{ij} - рез-т вычёркивания из матрицы C строки i и столбца j;

Очевидно, $(C^M)_{ij} = (C_{i,n-j+1})^M =: C^M_{i,n-j+1} \Rightarrow$

$|C^M| = c_{1n}|C^M_{1n}| - c_{1,n-1}|C^M_{1,n-1}| + \dots + (-1)^{n+1} c_{11}|C^M_{11}|$.

Предп-м, д-но, что для порядка $n-1$ и для $k=\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right.$: $|C^M| = k|C|$, тогда для порядка n: $|C^M| = c_{1n}k|C_{1n}| - c_{1,n-1}k|C_{1,n-1}| + \dots + (-1)^{n+1}c_{11}k|C_{11}|$. Тогда при $n:2$: $|C^M| = -k|C|$, иначе $|C^M| = k|C|$

Для $n=2$, очевидно, $|C| = -|C^м|$ (ведь $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = xw - yz$, $-\begin{vmatrix} y & x \\ w & z \end{vmatrix} = -(yz - xw)$)

$\Rightarrow$ для $n=3$: $|C| = -|C^м|$, для $n=4$ и $n=5$: $|C| = |C^м|$, для $n=6$ и $n=7$: $|C| = -|C^м|$ и т.д. Т.е. при $n = \left[\begin{matrix} 4k \\ 4k+1 \end{matrix}\right.$: $|C| = |C^м|$, иначе $|C| = -|C^м|$ $(k \in \mathbb{Z})$ ✓

Ранее показано: $|A| = (-1)^n |A^м|$.

Почему? Пример?

Отсюда: если $n \equiv 0 \pmod 4$, то опр-ль м.б. любым;
если $n \equiv 1 \pmod 4$, то $|A| = |A^м| = (-1)^n |A^м| = (-1)|A| \Rightarrow |A| = 0$;
если $n \equiv 2 \pmod 4$, то $|A| = -|A^м| = -(-1)^n |A^м| = -|A^м| = |A|$ — ограничений на опред-ль нет;
этих нет а других?
если $n \equiv 3 \pmod 4$, то $|A| = -|A^м| = -(-1)^n |A^м| = |A^м| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$

Ответ: если $n \not\vdots\, 2$, то определитель нулевой; иначе произв-й

Неверно по формуле (а не по тексту)

10 баллов верно доказано что $|A| = 0$ при $n = 4k+1$

При $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ $|A| = -|A^м|$ верно

$|A^m| = |A^м|$ верно

$B = A^м = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$ но ограничения на $|A|$ очевидно есть

$B^T = B$, а не $-B$ т.к. $|A| = 0$

При $n=3$ $A = \begin{pmatrix} a & b & -a \\ -b & c & -b \\ -a & b & a \end{pmatrix}$ $|A| = -|A^м|$

$B = A^м = \begin{pmatrix} -a & b & a \\ -b & c & -b \\ a & b & -a \end{pmatrix}$ $B \neq -B^T$

Верное доказательство по формуле для неч. n.
(A меняет знак при симметрии относительно побочной диагонали) и неверный ответ по формуле (при $n=2$ только ≤ 0)

Примеров при нечётных n нет

$4+23 =$ (23 баллов)

Бланк ответов