



Титульный лист

Направление ☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и
☐ Экономика и управление гуманитарные науки

Вариативный блок ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия Б О Р Ч О В

Имя М И Х А И Л

Отчество А Н А Р Е Е В И Ч

Дата рождения 1 8 0 1 2 0 0 3

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория А 3

Телефон 8 9 0 8 9 1 4 2 1 1 0

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5 Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и
☐ Экономика и управление гуманитарные науки

Вариативный блок ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с 1 2 5 0 до 1 2 5 5

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	40								
Балл члена жюри №2	50	40								

Итоговый балл 90

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Инвариантная часть

$N(t)$ — кол-во атомов камня-40 через время t

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad N(1250) = \frac{N_0}{2}$$

$N_0 - N(t)$ — количество распавшихся атомов камня-40

Найдём λ $N(1250) = \frac{N_0}{2}$

$$N(1250) = N_0 e^{-1250\lambda} \Rightarrow N_0 e^{-1250\lambda} = \frac{N_0}{2}$$

$$e^{-1250\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-1250\lambda = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1250\lambda = -\ln 2 \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{1250}$$

Введём функцию ~~$N(t)$~~

$A(t)$ — количество атомов орона-40

$$A(t) = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{10} \quad 10 = \frac{N_0 - N_0 e^{-\lambda t}}{10} = \frac{N_0 (1 - e^{-\lambda t})}{10}$$

T — ? , T — возраст образца

$$N(T) = 70A(T)$$

$$N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0 (1 - e^{-\lambda T})}{10} \quad 70 = 7 N_0 (1 - e^{-\lambda T})$$

$$e^{-\lambda T} = 7 (1 - e^{-\lambda T}) = 7 - 7e^{-\lambda T}$$

$$8e^{-\lambda T} = 7 \Rightarrow e^{-\lambda T} = \frac{7}{8} \Rightarrow -\lambda T = \ln \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{\ln 2}{1250} T = \ln \frac{8}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1250 \ln \frac{8}{7}}{\ln 2}$$

Ответ $\frac{1250 \ln \frac{8}{7}}{\ln 2}$ мин лет

500

Вариативная часть

БЛОК 2

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+|x|}, \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(405)

$$\mathcal{D}(S) = ? , \quad \operatorname{sgn} S(x) = ?$$

исслед S на глгд в $m 0$?

$$1) S_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n+|x|}$$

Заметим, что $S(x)$ — ^{члн} ряд Лейбница, т.е.

$$1) \forall n \quad S_n(x) S_{n+1}(x) < 0$$

$$\cancel{S_n(x) S_{n+1}(x)}$$

$$1) 2) |S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{т.е. монотонно стремится к нулю}$$

$$\text{Значит, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+|x|} = ox \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}(S) = \mathbb{R}. \checkmark$$

2) S глгд в 0 ?

$$S(x) \text{ глгд в } m 0 \Leftrightarrow \cancel{S_-(0) = S_+(0)} \quad S'_-(0) = S'_+(0) \checkmark$$

$$S'_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}{x} = \cancel{\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}}{x}} \left[\begin{array}{l} \text{воспольз} \\ \text{пр Лопитале} \\ \text{можно ли его} \\ \text{применять?} \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \right)' - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)'}{1} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow -0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} \quad (*)$$

$$\text{Покажем, что } \exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \right)' \text{ в } m x=0$$

$$1) \text{ ряд сг в } x=0$$

$$2) \text{ ряд из производные равномерно сгд в } 0(0)$$

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2}$ равномерно сход на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (**)

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-x)^2} \leq \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2} \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \forall n \geq 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2}$ равномерно сход на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ - сход

Таким образом, мы получили, что $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2}$,
т.е. применение пр. Лопиталя в (*) было корректно $\sqrt[n-1]{n-1}$

~~$$S_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow -0} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} \right) =$$~~

$$S_-(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow -0} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-x)^2} \right) =$$

справедливо в
силу (**)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Аналогично можно показать, что ~~$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$~~

что $S_+'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

Таким образом, $\underline{S_-'(0) = S_+'(0)} \Rightarrow S(x)$ непрерывна в т. 0

Найдем $\text{sgn } S(x) - ?$

Заметим, что $\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n+|x|} = \sum_{n=1}^{2N} S_n(x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} \geq 0$

$$\Rightarrow S(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{2N} S_n(x) \geq 0$$

Нужно было показать, что $S(x) > 0$, т.е. $\text{sgn } S(x) = 1$

