



3101487159939

Титульный лист

Направление ☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и
☐ Экономика и управление гуманитарные науки

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия М И Х А Й Л О В

Имя В И К Т О Р

Отчество Д Е Н И С О В И Ч

Дата рождения 0 4 0 5 2 0 0 3

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Аудитория Д 3

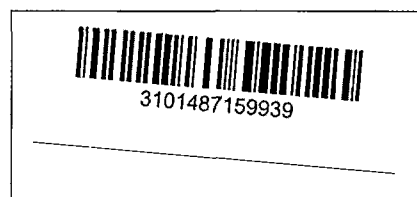
Телефон 8 9 1 2 2 6 6 3 3 6 0

Дата 0 3 0 2 2 0 2 5

Подпись

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление ☐ Естественные науки ☐ Инженерные науки
☒ Математика и информатика ☐ Социальные и
☐ Экономика и управление гуманитарные науки

Вариативный блок ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Город участия Е К А Т Е Р И Н Б У Р Г

Заполняется организаторами

Количество доп. листов Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	50	50								
Балл члена жюри №2	50	50								

Итоговый балл 100

Подпись
члена жюри №1

Подпись
члена жюри №2

Пример
заполнения

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф
Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариантная часть

$$\begin{aligned} T &= 1250 \text{ млн лет} \\ \star N(T) &= \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \\ \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\lambda T \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T} \end{aligned}$$

Для начала получим N_0

Пусть в образце x атомов аргона-40. Тогда по условию в нём $70x$ атомов калия-40. Распад 100 атомов калия-40 приводит к образованию 10 атомов аргона 40 $\Rightarrow x$ атомов аргона-40 были образованы из $\frac{100}{10}x = 10x$ атомов калия-40 $\Rightarrow N_0 = 70x + 10x = 80x$

$N_t = 70x$ по формуле из условий

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

$$20x = 80x e^{-\lambda t}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-\lambda t}$$

$$\ln \frac{1}{4} = -\lambda t$$

$$t = \frac{-\ln \frac{1}{4}}{\lambda} = \frac{\ln \frac{4}{1}}{\lambda} = \frac{\ln \frac{4}{1}}{\frac{\ln 2}{T}} = \frac{\ln 4}{\ln 2} T$$

$$\text{Ответ } t = \frac{\ln \frac{4}{1}}{\lambda} = \frac{\ln 4}{\lambda}$$

$$\text{Ответ } t = \frac{\ln \frac{4}{1}}{\lambda} = \frac{\ln 4}{\ln 2} T \text{ где } T = 1250 \text{ млн лет}$$

Блок 1

~~Приведём несколько примеров~~

Будем использовать формулу для вычисления определителя

$$|A| = \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{перестановкам} \\ (i_1 \dots i_n)}} (-1)^{2(i_1 \dots i_n)} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \dots a_{n,i_n} \quad \star$$

Пусть $|A| \neq 0$. Тогда существует хотя бы 1 ненулевое слагаемое. Тогда существует перестановка $(j_1, \dots, j_n)$, где $(-1)^{2(j_1 \dots j_n)} a_{1,j_1} \dots a_{n,j_n} \neq 0$ $\Rightarrow a_{1,j_1} \neq 0$ и $a_{2,j_2} \neq 0$ и $a_{n,j_n} \neq 0$

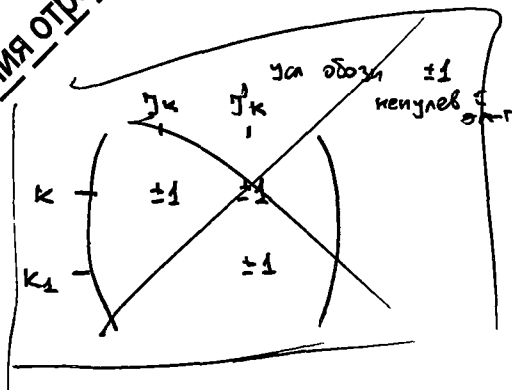
Тогда если существует ещё любое другое ненулевое слагаемое то для него существует аналогичная перестановка $(j'_1, \dots, j'_n)$

~~Возьмём~~ $(j_1, \dots, j_n) \neq (j'_1, \dots, j'_n) \Rightarrow \exists k \quad j_k \neq j'_k$, причём $a_{k,j_k} \neq 0$ и $a_{k,j'_k} \neq 0$

$(j_1, \dots, j_n)$ - перестановка $\Rightarrow \exists k_1 \quad j_{k_1} = j'_k$, причём $a_{k_1,j_{k_1}} \neq 0$

~~Значит в строке~~ $a_{k_1,j'_k} \neq 0$, и $a_{k_1,j_{k_1}} \neq 0$, причём $k_1 \neq k$, т.к. $j_k \neq j'_k$, поэтому и $j'_k \neq j_{k_1}$

Линия отреза



Бланк ответов

Будем ~~рассматривать~~

~~Рассмотрим~~ определитель

Пусть в матрице A есть ~~какое-то число~~ γ_k с ненулевым числом ненулевых элементов. Тогда определитель A равен нулю.

Например ~~при~~ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = 0$

В формуле $\circledast$ в каждой перестановке встречается γ_k указывающее на соотв. эл-т a_{kj} из столбца в котором нет ненулевых эл-тов $\Rightarrow a_{kj} = 0 \Rightarrow \text{произв} = 0 \Rightarrow |A| = 0$

~~Если в матрице A есть~~

~~Далее будем рассматривать матрицы без столбцов в которых только нули~~

Обозначим Π_n множество значений определителя матрицы $n \times n$ в которой нет ~~столбцов~~ без ненулевых эл-тов и в каждой строке ровно 2 ненулевых эл-та, причем все эл-ты равны 0, 1 или -1. Нам нужно найти Π_{2025} , вместе с рассуждением это ответ на задачу

$\Pi_2 = \{2, 0, -2\}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underbrace{ad}_{1 \text{ или } -1} - \underbrace{bc}_{1 \text{ или } -1}$$

$\rightarrow$ всего 3 эл $\{2, 0, -2\}$

Примеры

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Докажем по индукции, что и $\Pi_{2025} = \{0, \pm 2, \pm 2^2, \dots, \pm 2^{1012}\}$

База есть

$$\{0, \pm 2, \pm 2^2, \dots, \pm (2^{1012})\}$$

Переход пусть $\Pi_k = \{0, \pm 2, \pm 2^2, \dots, \pm 2^{k/2}\}$ Сл Π_{k+1}

Среди рассм. м-ва матриц есть те γ ~~матрицы~~ A' которых существует столбец, в котором ровно 1 ненулевой эл-т. Пусть для матрицы A' этот столбец равен γ , причем ненулевой эл-т a_{1j}

$$A' = \begin{pmatrix} \gamma \\ \vdots \\ \pm 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Раскожем $|A'|$ по столбцу j

Тогда $|A'| = \pm 1 \cdot |A'_{\gamma}|$, где $|A'_{\gamma}|$ - определ-ль матрицы A' без 1-й строки и j -го столбца

γ A'_{γ} по прежнему в каждой строке ровно 2 ненул эл-та ~~(мы убрали только нули из 1-й строки)~~ ~~и нет γ~~ Все эл-ты равны 0, 1 или -1. Либо в A'_{γ} есть столбец

Бланк ответов

состоящий из одних нулей $\Rightarrow |A_n| = 0$ (см выше) $\Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow |A'| \in \mathbb{A}_{k+1}$,
 либо его нет $\Rightarrow |A'| \in \mathbb{A}_k$ по предп. индукции $\Rightarrow |A'| = \pm |A'|_1$
 $\in \{0 \pm 2, \pm(2^2) \pm(2^{\frac{k-1}{2}})\} \in \{0 \pm 2, \pm(2^2) \pm(2^{\frac{k-1}{2}})\}$
 ~~$\Rightarrow \pm(2^{\frac{k-1}{2}}) \in \{0 \pm 2, \pm(2^2) \pm(2^{\frac{k-1}{2}})\}$~~
 ~~$\Rightarrow \pm(2^{\frac{k-1}{2}}) \in \{0 \pm 2, \pm(2^2) \pm(2^{\frac{k-1}{2}})\}$~~

и т д

Теперь рассмотрим остальные матрицы, т.е. те, у которых нет столбца, в котором бы был только 1 ненулевой эл-т $\Rightarrow$ В каждом столбце хотя бы 2 ^{ненул} эл-та $\Rightarrow$ равно 2 (о/п пусть есть столбец в котором 3 эл-та $\Rightarrow$ всего ненул эл-тов хотя бы $3+k-2$ если считать по столбцам, но равно $2(k+1)$, если считать по строкам $3+2k > 2(k+1)$ $\times$)

Вернёмся к $(*)$ ~~Докажем~~ ~~Заметим~~ что существует всего 2 перестановки, для которых произведение эл-тов матрицы не равно нулю.

$$a_{1,1} \quad a_{2,1} \quad a_{n,1} \neq 0$$

~~на матрицу~~ ~~Для этой~~ покрасим эл-ты матрицы в Ч и Б (мы не можем брать в произв 2 эл-та одного цвета $\Rightarrow$ 2 эл-та в одной строке или 1 столбце)

~~Каждый ненулевой эл-т в первой строке есть ещё ненулевой эл-т~~

Пусть в произв участвует $a_{ij} \neq 0$ Тогда в этом столбце j есть ровно один ^{ненул} эл-т, который ^{при этом} не может быть с a_{ij} в произведении и в строке i есть ровно 1 ненул эл-т который ^{при этом} не может быть в произведении. Граф на вершинах из ненул эл-тов, где рёбра — отношение "не могут быть в произведении" таков, что степень каждой вершины равна 2 $\Rightarrow$ он состоит из циклов. Заметим, что рёбра у каждой вершины разный "причины" (1 столб/1 строка) $\Rightarrow$ циклы чётной длины, т.к. иначе должна сум. вершина, у которой ~~нет~~ рёбра одного "причины". Циклы очевидно длины ≥ 4 . Возьмём любой цикл. Из него тривиальным образом получается ровно 2 подперестановки $a'_{1,1} a'_{2,2} \dots a'_{m,m}$ и $a'_{1,2} a'_{2,1} \dots a'_{m,m}$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |A'| &= \pm a'_{1,1} a'_{2,2} \dots a'_{m,m} |A'_{1,1,2} \dots m| \\ &\quad \pm a'_{1,2} a'_{2,1} \dots a'_{m,m} |A'_{1,2,1} \dots m| \\ &= \pm |A'_{1,1} \dots m| \pm |A'_{1,2} \dots m| \in \{0 \pm 2 \pm(2^2), \pm(2^{\lfloor \frac{k+1-m}{2} \rfloor + 1})\} \\ &\quad \{0 \pm 2 \pm(2^2) \pm(2^{\frac{k-1}{2}})\} \\ &\quad \pm(2^{\lfloor \frac{k+1-m}{2} \rfloor + 1}) \end{aligned}$$

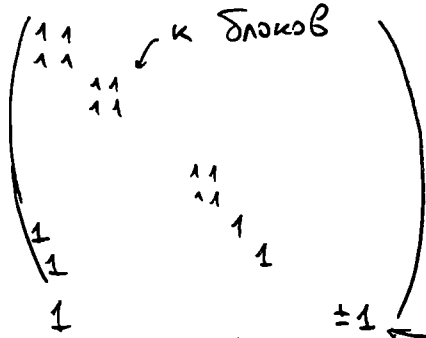
и т д

Таким образом, $|A| \in \{0, 2, -2, 4, -4, 2^{\frac{1012}{1007}}, -2^{\frac{1012}{1007}}\}$ $\swarrow$ ответ

Пример строится из ~~перехода индукции~~ ~~из~~ ~~перехода~~ инд-ции

0 уже был выше

$\pm 2^k$



± 1 знак при 2^k
раск-е по столбцам