ИЗУМРУД СТУДЕНТ

3101611522977

Титульный лист

Направление

- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

Курс ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

Фамилия БРИЗИНОВА

Имя ЭВЕЛИНА

Отчество ОЛЕГОВНА

Дата рождения 17 06 2004

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Аудитория 005

Дата 02 02 2026 **Подпись**

Пример заполнения АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОПРСТУФ ХЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ1234567890

ИЗУМРУД СТУДЕНТ

3101611522977

Проверочный лист

Заполняется участниками

Направление
- [ ] Естественные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Экономика и управление
- [ ] Инженерные науки
- [ ] Социальные и гуманитарные науки

Вариативный блок [ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5

Курс [ ] 1 [ ] 2 [ ] 3 [x] 4 [ ] 5 [ ] отсутствует

Город участия ЕКАТЕРИНБУРГ

Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

Протокол проверки

Заполняется жюри

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Балл члена жюри №1	45	35								
Балл члена жюри №2	45	35								

Итоговый балл 80

Подпись члена жюри №1

Подпись члена жюри №2

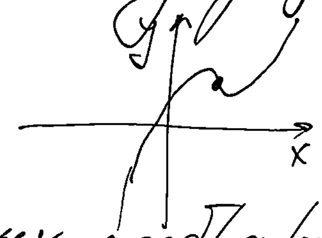
Пример заполнения А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариантная часть

$y=x^3+bx^2+cx+d$

Рассмотрим схему графика какой-нибудь кубической параболы:



Из интуитивных соображений кажется, что ~~общей~~ искомой точкой будет точка, отмеченная на графике - точка между max и min (если они есть, если их нет - то они совпадают между собой и с искомой точкой) (+)

Давайте найдём эту точку и проверим справедливость гипотезы. Для этого возьмем производную нашей ~~ф-и~~ функции

$y'=3x^2+2bx+c$

Из курса школьной алгебры известно, что точка м/д корнями (между max и min исходной функции) это вершина параболы, а формула ее $x=\frac{-b}{2a}$ (в базовых обозначениях $y=ax^2+bx+c$) В нашем случае это будет $x=\frac{-2b}{2\cdot 3}=\frac{-b}{3}$

Найдем соответствующий ей y нашей функции

$y\left(-\frac{b}{3}\right)=\left(\frac{-b}{3}\right)^3+b\left(\frac{b}{3}\right)^2-\frac{cb}{3}+d=\frac{2b^3}{27}-\frac{cb}{3}+d.$

Итак, наша гипотеза - искомая точка - $\left(\frac{-b}{3}, \frac{2b^3}{27}-\frac{cb}{3}+d\right)$ (+)

Удостоверимся в этом

Рассмотрим $y\left(-\frac{b}{3}+t\right)$:

$$y\left(-\frac{b}{3}+t\right)=\left(-\frac{b}{3}+t\right)^3+b\left(-\frac{b}{3}+t\right)^2+c\left(-\frac{b}{3}+t\right)+d=$$

$$=\frac{-b^3}{27}+\frac{b^2}{3}t-\cancel{bt^2}+t^3+\frac{b^3}{9}-\frac{2b^2t}{3}+\cancel{bt^2}-\frac{cb}{3}+ct+d=$$

$$=\frac{2b^3}{27}-\frac{b^2t}{3}+t^3-\frac{cb}{3}+ct+d=y\left(-\frac{b}{3}\right)\overbrace{-\frac{b^2t}{3}+t^3+ct}^{f(t)}\ (+)$$

Заметим, что t входит в это выражение только в нечетных степенях. Отсюда следует, что

$$y\left(-\frac{b}{3}+t\right)=y\left(-\frac{b}{3}\right)-\frac{b^2t}{3}+t^3+ct=y\left(-\frac{b}{3}\right)+f(t)=y\left(-\frac{b}{3}\right)-f(-t)$$

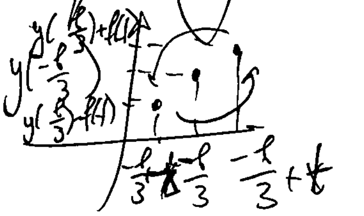
где $f(t)=\frac{-b^2t}{3}+ct+t^3$. Это значает, что при перемещении точки $\left(-\frac{b}{3}, \frac{2b^3}{27}-\frac{cb}{3}+d\right)$ в начало координат получившаяся функция $f(t)=y\left(-\frac{b}{3}+t\right)-y\left(-\frac{b}{3}\right)$ является нечётной (+) Нечётная функция является центрально симметричной (ибо поворотом на 180° переходит в себя)

Не написано строгого опр-ия

и сдвиг центральной симметрии не помешает

(Также можно сказать, что функция y является нечетной относительно точки $\left(-\frac{b}{3}, \frac{2b^3}{27}-\frac{cb}{3}+d\right)$)

~~Итак~~ Можно удостовериться в центральной симметрии и напрямую. Рассмотрим картинку



Относительно точки $\left(-\frac{b}{3}, y\left(-\frac{b}{3}\right)\right)$ при повороте точка $\left(-\frac{b}{3}+t, y\left(-\frac{b}{3}\right)+f(t)\right)$ и $\left(-\frac{b}{3}-t, y\left(-\frac{b}{3}\right)-f(t)\right)$ переходят друг в друга, что показывает в явном виде центральную симметрию (+)

45 баллов

Блок 2 Математический анализ

Для начала хотим понять, какие α нам точно не подходят и когда $\lim \neq 0$. Для этого оценим величину $\frac{n^\alpha}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k$ снизу. (БОО $n \geq 2$)

$$\frac{n^\alpha}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k \geq \frac{n^\alpha}{2^n} x_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}2^k = \left[\begin{array}{c}\text{воспользуемся}\\ \text{суммой геом.}\\ \text{прогрессии}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{n^\alpha}{2^n}x_{n-1}\,2(2^{n-1}-1) = n^\alpha x_{n-1}\frac{2(2^{n-1}-1)}{2^n} \geq \left[\frac{2(2^{n-1}-1)}{2^n} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} \overset{n\geq 2}{\geq} \frac{1}{2}\right]$$

Необязательно, например $\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n e^{n}}$ сходится

$$\geq \frac{n^\alpha x_{n-1}}{2} = \left[\begin{array}{c} x_{n-1} - \frac{1}{n^{1+\delta}} - \\ \text{удовл. условию при } \delta>0\end{array}\right] = \frac{n^\alpha}{2n^{1+\delta}} = \frac{1}{2}n^{\alpha-1-\delta}$$

(+)

При $\alpha-1-\delta \geq 0$ правая часть нер-ва $\geq \frac{1}{2} > 0$, что значает, что условие не выполняется

$\alpha \geq 1+\delta$

$\delta \to +0$

$\alpha > 1$ – расход (+)

Рассмотрим случай $\alpha=1$. Он не „вписывается" в рассмотренный случай, ибо при $\forall\delta>0$ $\alpha>1$, но не $=1$.

Нетрудно удостовериться, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k$ существует $\forall x_k$. Давайте это сделаем!

$$\left|\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k - \frac{(n+m)}{2^{n+m}}\sum_{k=1}^{n+m-1}2^k x_k\right| = \left|\frac{n}{2^n}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k - \frac{(n+m)}{2^{n+m}}\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k -\right.$$

$$\left.- \frac{(n+m)}{2^{n+m}}\sum_{k=n}^{n+m-1}2^k x_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k\left(\frac{n}{2^n}-\frac{(n+m)}{2^{n+m}}\right) - \frac{(n+m)}{2^{n+m}}\sum_{k=n}^{n+m-1}2^k x_k\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n-1}2^k x_k\left(\frac{n}{2^n}-\frac{(n+m)}{2^{n+m}}\right)\right| + \left|\frac{(n+m)}{2^{n+m}}\sum_{k=n}^{n+m-1}2^k x_k\right| \Rightarrow$$

+

$$0 < \frac{(n+m)}{2^{n+m}} \sum_{k=n}^{n+m-1} 2^k x_k \le \frac{(n+m)}{2^{n+m}} 2^{n+m-1} \sum_{k=n}^{n+m-1} x_k = \frac{n+m}{2} \sum_{k=n}^{n+m-1} x_k \le$$

к x_n невозр, то $x_n \in x_k$

$$\le \frac{n+m}{2} m x_n \le \left[\begin{array}{l} x_n \le \frac{1}{n^{\alpha+1}} \\ \exists \alpha > 0 \end{array} \right] \le \frac{n+m}{2} m \frac{1}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ (-)$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \left(\frac{n}{2^n} - \frac{(n+m)}{2^{n+m}} \right) \right| \le$$

необязательно, например $x_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$

$$\le \left[\begin{array}{l} \exists \varepsilon : x_k < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \\ 2^k x_k \text{ наиб при} \\ \text{наиб } k \text{ предн} \end{array} \right] \le n \frac{2^{n-1}}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \left| \left(\frac{n}{2^n} - \frac{(n+m)}{2^{n+m}} \right) \right| \le$$

$$\le \frac{n 2^{n-1}}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \left| \frac{n-(n+m)}{2^{n+m}} \right| = \frac{n m}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \frac{1}{2^{m+1}} \longrightarrow 0 \ (+)$$

$\longrightarrow 0 \Rightarrow$ ~~по критерию Коши сход.~~

по сравн. признаку

$$0 < \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \le \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{k^{1+\varepsilon}} < \frac{n}{2^n} \frac{1}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k =$$

$= 2(2^{n-1}-1)$

$$= \frac{n}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \frac{2^n-1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\frac{n}{(n-1)^{1+\varepsilon}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\frac{2^n-1}{2^n} \to 1$

Итак, $\forall x_k$, удовл условию, при $\alpha = 1$ по теореме о 2х милиционерах $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k x_k = 0$

$$0 < \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \le \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \le \left[\sum_i x_i y_i \le \sum_i x_i \sum_i y_i, \ x_i, y_i \ge 0 \right]$$

посл. признак $\exists \varepsilon$

$$\le \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{2^n-1}{2^n} n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} \le n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}}$$

$$0 < \frac{n}{2^n} \sum_{k}^{n-1}$$

Бланк ответов

$$\frac{n}{\alpha^n}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k x_k \le \left[\sum x_i y_i \le \sum x_i \sum y_i \right] \le \frac{n}{\alpha^n}\sum_{k=1}^{n-1} 2^n \sum_{k=1}^{n-1} x_k =$$

$x_i, y_i \ge 0$

$$= n\,\underbrace{\frac{\alpha^n-1}{\alpha^n}}_{<1}\sum_{k=1}^{n-1} x_k < n\sum_{k=1}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k^{1+\varepsilon}} \xrightarrow{?} 0$$

$\alpha > 1$ - расход ($\exists x_k$ расход)

=> предположительно, $\boxed{\alpha = 1}$

33 баллов