ИЗУМРУД СТУДЕНТ

3101593868613

# Титульный лист

**Направление**
- ☐ Естественные науки
- ■ Математика и информатика
- ☐ Экономика и управление
- ☐ Инженерные науки
- ☐ Социальные и гуманитарные науки

**Вариативный блок** ☐ 1 ■ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

**Курс** ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ■ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

**Фамилия** ВОРОНЦОВ

**Имя** ТИМОФЕЙ

**Отчество** АЛЕКСАНДРОВИЧ

**Дата рождения** 04 11 2004

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

**Аудитория** 206

**Дата** 02 02 2026 **Подпись** ТК Воронц

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

ИЗУМРУД СТУДЕНТ

3101593868613

# Проверочный лист

## Заполняется участниками

**Направление**

- [ ] Естественные науки
- [ ] Инженерные науки
- [x] Математика и информатика
- [ ] Социальные и гуманитарные науки
- [ ] Экономика и управление

**Вариативный блок** ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

**Курс** ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ отсутствует

**Город участия** ЕКАТЕРИНБУРГ

## Заполняется организаторами

Количество доп листов

Количество черновиков к проверке

Время выхода с до

## Протокол проверки

## Заполняется жюри

| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Балл члена жюри №1 | 20 | 5 | | | | | | | | |
| Балл члена жюри №2 | 20 | 5 | | | | | | | | |

**Итоговый балл** 25

**Подпись члена жюри №1**

**Подпись члена жюри №2**

**Пример заполнения**

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф

Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Бланк ответов

Инвариантная часть

Док-ть: $\exists (x_c, y_c) \in \mathbb{R}^2$: график $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ центрально симметричен отн-но нее

Найти: $(x_c, y_c)$

Доказательство: такая т-ко $\exists!$ в силу ~~монотонности~~ нечетности и эта точка — есть точка перегиба функции. Покажем, это конструктивно

$y'(x) = 3x^2 + 2bx + c \quad y'(x_c) = 0$ и она ~~ед~~ единственна

$3x^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4 \cdot 3c}}{6}$, т.к. точка $x_c$ единств то $D = 0 \Rightarrow \cancel{4}b^2 = 3c$ и $x_c = -\frac{b}{3}$

Подставим $y(x_c) = -\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^3 c}{\cancel{9}3} + d = d - \frac{b^3}{27}$ (+)

Искомая точка ц симметрии $(x_c, y_c) = \left(-\frac{b}{3}, d - \frac{b^3}{27}\right)$

Покажем, что ~~эта~~ точка — действительно точка симметрии

условие центральной симметрии записывается в виде:

$y(x + x_c) - y_c = y_c - y(x_c - x)$ (+) для произвольного $x$

рассмотрим $y(x + x_c) = y(x - \frac{\cancel{x_c}\, cb}{3}) = x^3 - 3x^2\frac{b}{3} + 3x\frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27}$
$+ bx^2 - \frac{2}{3}xb^2 + \cancel{\frac{b^3}{9}} + cx - \cancel{\frac{b^3}{9}} + d$ -

рассм $y(x_c - x) = -x^3 - 3x^2\frac{b}{3} - 3x\frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27} + bx^2 + \frac{2}{3}xb^2 - cx + d$

$y(x + x_c) - d + \frac{b^3}{27} = \cancel{x^3} - 3\cancel{x^2\frac{b}{3}} + 3\cancel{x\frac{b^2}{9}} + bx^2 - \cancel{\frac{2}{3}}xb^2 + \cancel{cx}$

$\parallel$

$d - \frac{b^3}{27} - y(-x + x_c) = \cancel{x^3} + 3\cancel{x^2}\frac{b}{3} + 3\cancel{x\frac{b^2}{9}} - bx^2 - \cancel{\frac{2}{3}x}b^2 + \cancel{cx}$

видно, что равенство верно $\Rightarrow$ действительно точка ц симметрии равенства нет

ЧТД

(−)

Ответ: $\left(-\frac{b}{3}, d - \frac{b^3}{27}\right)$

20 баллов

Блок 2

Найти макс-ое $\alpha \geq 0$ $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозр, $x_n > 0$:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty$ выполнялось $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k = 0$

Решение

1) отметим, что $2^n$ растет быстрее, чем $n^\alpha$ $\forall \alpha$ конечного

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{2^n} = 0$ $\forall \alpha$ +

Тогда для выполнения ~~что~~ требуемого условия достаточно потребовать, чтобы $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k x_k < +\infty$ или $\sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k$ растет не быстрее $2^n$ почему? это покажет только что подходит $\alpha = 0$

2) ~~Рассмотрим $\frac{n^\alpha}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ невозр и $\to 0 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \leq x_1 \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k \leq 2^{n-1} x_1 (n-1)$, тогда~~

~~$\frac{n^\alpha}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \leq \frac{x_1}{2}(n-1) n^\alpha$; $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \leq$~~

~~$\leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1}{2}(n^{\alpha+1} - n^\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha+1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \leq -1$,~~

~~т.к. надо максимальное, $\alpha = -1$ и ~~Ответ $\alpha = -1$~~~~

при $\alpha \leq -1$ точно предел 0

3) $\sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \leq x_0 \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k = x_0 S_{n-1}$, где $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k$

$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} 2^k x_k \leq \frac{n^\alpha}{2^n} x_0 S_{n-1}$?

5 баллов?

Бланк ответов